

Math. P.
153w

Math. P.

153rd

Freedon

80
müßte man das aufführen

DIE PRAXIS

DER

METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE

FÜR DIE

BEDÜRFNISSE DER ANFÄNGER

BEARBEITET VON

W. v. FREEDEN,

Oberlehrer der Mathematik und Physik, Rector der Grossherzogl. Oldenburgischen
Navigationsschule.

ERSTER THEIL.

Elementare Darstellung der Methode nebst Sammlung
vollständig berechneter physikalischer, meteorologischer, geodäti-
scher und astronomischer Aufgaben, welche auf lineare und trans-
cendente Gleichungen führen.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1 8 6 3.

Smith!

ANKÜNDIGUNG.

Mit dieser Einführung in die Praxis der Methode der kleinsten Quadrate wünscht der Verfasser einem mehrseitig gefühlten Bedürfniss abzuhelpfen. Studierende an Universitäten, polytechnischen und anderen vorwiegend mathematischen Lehranstalten, welche die Theorie der Methode haben vortragen hören, sind häufig nachher in Verlegenheit um das nöthige Beobachtungsmaterial, welches die Data zu den wünschenswerthen praktischen Uebungen hergeben soll. Ihnen gegenüber stehen Andere, welchen in der Praxis ihres Berufs (Eisenbahnbau, Geodäsie, Küstenvermessung etc.) oder in der Entwicklung ihrer Studien (Physik, Chemie, Meteorologie, Statistik etc.) ein reicher Schatz von Beobachtungen geworden ist, deren Widersprüche sie gern ausgleichen, deren Gesammtinhalt sie gern durch ein Gesetz ausdrücken möchten, die aber nicht Zeit, Lust oder Gelegenheit haben, die vollständige Theorie in den Darstellungen ihrer ersten Entdecker und Begründer zu studieren.

Daher erschien es zeitgemäss, durch eine grössere Anzahl vollständig durchgerechneter Beispiele, in welchen wirkliche, fremde und eigene, Beobachtungen verarbeitet sind, dem Einen Gelegenheit und Veranlassung zur Uebung, dem Andern eine Anleitung zur Aufstellung der Gleichungen und Anweisung zur praktischen Durchführung der Rechnung zu geben, von der Theorie aber vorerst nur soviel aufzunehmen, als zum Verständniss der wichtigsten Rechnungen nöthig war. Ferneren Untersuchungen über mittlere Fehler, wahrscheinliche Fehler etc. sind vielmehr einer zweiten Abhandlung vorbehalten, welche nebst weiteren Beispielen der vorliegenden baldthunlichst folgen soll.

**Bayerische
Staatsbibliothek
München**

DIE PRAXIS

VON

METHODE

DIE PRAXIS

DER

METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE

FÜR DIE

BEDÜRFNISSE DER ANFÄNGER

BEARBEITET.

ERSTER THEIL.

Elementare Darstellung der Methode zur Bestimmung
vollständig berechneter physikalischer, astronomischer, geodä-
sicher und astronomischer Aufgaben, welche auf Differenzial- und
Integralrechnung beruhen.

VERLAG VON

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDR. VIEWEG UND SOHN

1863

DIE PRAXIS

METHODE

KLEINSTEN QUADRATE

REDUKTION DER ANFÄNGER

BEARBEITET

DIE PRAXIS

DER

METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE

FÜR DIE

BEDÜRFNISSE DER ANFÄNGER

BEARBEITET VON

W. v. FREEDEN,

Oberlehrer der Mathematik und Physik, Rector der Grossherzogl. Oldenburgischen
Navigationsschule.

ERSTER THEIL.

Elementare Darstellung der Methode nebst Sammlung
vollständig berechneter physikalischer, meteorologischer, geodäti-
scher und astronomischer Aufgaben, welche auf lineare und trans-
cendente Gleichungen führen.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1 8 6 3.



Die Herausgabe einer Uebersetzung in französischer und englischer Sprache,
sowie in anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

ERSTER THEIL

Elementare Darstellung der Methode der Berechnung
vollständiger astronomischer Aufgaben, welche auf lineare und trans-
cendente Gleichungen führen.

BRUNNEN

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1863

VORWORT.

Unsere Literatur ist gewiss nicht arm an Darstellungen der Methode der kleinsten Quadrate. Wir besitzen Bearbeitungen derselben von ihrem eigentlichen Erfinder Gauss, und von seinen ebenbürtigen Nachfolgern Encke, Bessel u. a. m., welche den höchsten Anforderungen der Wissenschaft entsprechen, und nicht allein die obersten Principien der Methode beleuchten, sondern auch eine reichhaltige Fundgrube abgeben für gewisse praktische Rücksichten, welche bei den mühsamen numerischen Rechnungen mit Vortheil können genommen werden. — Nach jenen Arbeiten müssen genannt werden die Entwicklungen der Methode von Gerling, Reuschle, Dienger, Wittstein, welche bei aller wissenschaftlichen Strenge der Darstellung schon mehr sich den nächsten Bedürfnissen der Praxis zuwenden und durch Vorführung einer Reihe von Beispielen dem Anfänger den Weg zu zeigen sich bemühen.

Nun ist keine Frage, dass die letzten Jahrzehnte mit der ungemeinen Vertiefung der naturwissenschaftlichen Studien und ihrer Anknüpfung an die Bedürfnisse des Lebens der Methode der kleinsten Quadrate immer

neue Freunde auch aus nicht fachwissenschaftlichen Kreisen zugeführt haben, welche das stets wachsende Beobachtungs-Material zu bewältigen und nutzbringend zu machen bemüht sind. Es ist aber nicht zu verwundern, dass es in manchen Berufszweigen des bürgerlichen Lebens Männer giebt, welche, ohne der Theorie der Methode tiefere Studien zuwenden zu können oder zu wollen, dennoch von ihrer Praxis gern Notiz nehmen, von ihren Schlüssen Nutzen ziehen möchten, sowie andererseits auch selbst der Mathematik Beflissene nicht ohne Vorthail erst die mühsamen praktischen Arbeiten durchmachen, bevor sie sich zum ernsteren Studium der ganzen Theorie entschliessen.

Vielleicht ist es mir gelungen, durch meine elementare Darstellung der Methode eine Lücke in unserer Literatur auszufüllen, indem ich einzig die Bedürfnisse des Praktikers und Anfängers zu Rathe zog und besonders die ersten Schwierigkeiten hinsichtlich der allgemeinen Form der Function und die späteren der numerischen Rechnung eingehend zu heben versuchte. Sollte sich meine Hoffnung bestätigen, so werde ich in einer zweiten bald folgenden Abtheilung die weitere Entwicklung der Methode, die Bestimmung der wahrscheinlichen Fehler der Resultate u. s. w. vorführen und die Beispielsammlung angemessen vervollständigen durch Aufnahme statistischer, chemischer etc. Aufgaben, soweit meine Beobachtungen reichen und fremde mir zugänglich werden.

Elsfleth, den 31. December 1862.

Der Verfasser.

INHALTS-VERZEICHNISS.

	Seite
I. Allgemeine Einleitung: Was man unter der Methode der kleinsten Quadrate versteht	1
Beobachtungsfehler	2
Arithmetisches Mittel	3
Theorie von Laplace über die Summe der übrigbleibenden Fehler	5
Theorie von Gauss über die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler	6
II. Das Verfahren bei der Behandlung von Aufgaben, welche auf lineäre Gleichungen führen	8
Wie die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler zu einem Minimum wird	10
A. Lineäre Gleichungen mit einer Unbekannten.	
Arithmetisches Mittel. Anwendung	
1. auf Winkelmessung	11
2. auf die Ermittlung der Constante einer Tangentenboussole .	13
B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten . . .	16
Bildung der Normalgleichungen	17
Gewichte derselben	19
Aufgaben:	
1. Berichtigung eines Nivellements	21
Die Praxis des Eliminationsverfahrens	22
Näherungswerthe	23
Interpolationsverfahren	24
Abkürzung desselben durch Einführung einer neuen Unbekannten	27
2. Gesetz der Ausdehnung der Flüssigkeiten durch die Wärme .	31
3. Ausgleichung von Horizontalwinkeln	34
4. Die normale mittlere Jahrestemperatur des Breitenparallels als Function der Breite des Parallels	38

	Seite
5. Die Temperatur der Tiefe als Function der Tiefe	42
6. Die Grösse des mittleren Meridiangrades als Function der Breite	46
Historisches	47
Aeltere, besonders Laplace's Rechnungen über das mittlere	
Rotations-Ellipsoid	52
Amplitudenfehler	59
Theorien von Schmidt (Gauss), Walbeck, Bessel . . .	61
Neue Berechnung des Meridiangrades mit Zugrundelegung	
von Bessel's Daten und anlehnend an Laplace's Theorie	64
Dieselbe mit erweiterter Formel	73
Mittlerer Fehler. Abplattung nach Schmidt's Formel . .	79
7. Bestimmung der Breite und der Durchbiegungs-Constante eines	
Universalinstruments vermittelt beobachteter Meridional-	
Zenithdistanzen	82
III. Das Verfahren bei der Behandlung von Aufgaben,	
welche auf transcendente Gleichungen führen . . .	88
Aufgaben:	
1. Ermittlung der Coordinaten eines gewissen Punktes, wenn	
die Coordinaten und Azimuthe mehrerer anderer Punkte ge-	
geben sind	89
Umwandlung der transcendenten Gleichungen in lineäre . .	90
2. Das Pothenot'sche Problem mit nicht orientiertem Azimuth,	
zunächst in seiner ursprünglichen Beschränkung als Problem	
der drei Punkte. Mehrere Fälle	96
3. Das Pothenot'sche Problem, angewandt auf eine grössere	
Anzahl eingeschnittener Punkte bei nicht orientiertem Azimuth	105
Wiederholung der Rechnung mit verbessertem Näherungs-	
werth für die Azimuth-Correction	113

I. Allgemeine Einleitung:

Was man unter der Methode der kleinsten Quadrate versteht.

1. Beobachtern ist die Thatsache bekannt, dass die Genauigkeit unserer Wahrnehmungen stets durch Fehler beeinträchtigt wird, welche ihren Grund in Irrthümern unserer Sinne, — Gesichts-, Gehörfehler besonders — ferner in Veränderungen der physischen Gegenstände um uns, oder in Mängeln der gebrauchten Instrumente u. s. w. haben. Kehren diese Fehler beständig und in gleicher Grösse wieder, sind also constant, wie man zu sagen pflegt, wie z. B. häufig die Indexfehler bei Theilungen der Gradbögen, oder der Gang der Uhren für eine gewisse Zeit u. s. w., so sind sie nur schädlich, so lange man sie nicht kennt. Von ihnen sind zu unterscheiden die zufälligen Fehler, welche bei derselben oder verschiedenen Beobachtungen verschieden ausfallen, nie ganz verschwinden, und im besten Fall nur auf ein geringstes Maass vermindert werden können. Daneben trüben noch Versehen mancherlei Art die Richtigkeit der angestellten Beobachtungen; da man indessen meistens sich ihrer sowohl erwehren als der constanten Fehler vergewissern kann, so ist es hauptsächlich die zweite Klasse von Fehlern, die sogenannten zufälligen, welche, unter dem speciellen Namen von Beobachtungsfehlern begriffen, das Nachdenken herausfordern, wie man auch sie möglichst unschädlich machen könne.

2. Man stellt Beobachtungen zu dem Zwecke an, um irgend eine unbekannte Thatsache, z. B. die Grösse eines Winkels, das specifische Gewicht eines Körpers u. s. w. zu erfahren. Ergäbe sich aus der Beobachtung unmittelbar oder mittelbar die genaue Thatsache, so wäre die Sache damit abgemacht; da aber jede

Beobachtung als fehlerhaft anzusehen ist, so wird nicht die genaue Thatsache, deren Werth durch S bezeichnet werden mag, das Resultat der Beobachtung sein, sondern ein Werth $S \pm n$, indem im Allgemeinen einzuräumen ist, dass die Beobachtungsfehler n die Grösse der Unbekannten sowohl zu vermehren als zu vermindern im Stande sind. Um nun aus einzelnen für sich gleich unzuverlässigen Beobachtungen doch glaubwürdige Ergebnisse zu erhalten, hat man schon früh zu einem noch fortwährend üblichen Auskunftsmittel gegriffen, welches darin besteht, dass man die Beobachtungen vervielfältigt, und dadurch zunächst die Fehler hindert, einseitig zu wirken, vielmehr sich die Aussicht eröffnet, dass einer gewissen Menge von positiven Fehlern andere negative in voraussichtlich ungefähr gleicher Grösse gegenüberstehen werden. Dabei erlaubte man sich freilich in frühern Zeiten die Willkürlichkeit, dass man aus der ganzen Reihe von Beobachtungen einzelne herauswählte, welche unter besonders günstigen Umständen angestellt zu sein schienen, und nun unter Beseitigung der übrigen diese Beobachtungen allein der Ermittlung der wirklichen Thatsache zu Grunde legte. Weil indessen das Urtheil über die Zuverlässigkeit einer Beobachtung selbst wieder trügerisch sein wird und es sich empfiehlt, um möglicher Weise alle Fehler zu erfahren, Beobachtungen unter möglichst verschiedenen, also schlecht zu vergleichenden Umständen anzustellen, so ist jenes Verfahren längst als unwissenschaftlich beseitigt, und bei der Ausbeutung der Beobachtungen nur die Methode als die richtige anerkannt, welche, unter Voraussetzung gleicher Sorgfalt bei der Anstellung, sämtliche Beobachtungen zur Rechnung heranzieht.

3. Diese wird natürlich bald mehr, bald weniger verwickelt. Am einfachsten gestaltet sie sich, wenn der Werth der unbekannten Grösse, z. B. eines Winkels, unmittelbar schon durch die einzelnen gleich unzuverlässigen Messungen angedeutet ist, und nur die Beobachtungsfehler es verhindern, dass bei jeder Messung derselbe Werth erhalten wird. Z. B. ergeben sämtliche Messungen als gesuchte Winkelgrösse n Grade m Minuten, daneben aber nach einander 41, 40, 40, 39, 38, 38, 37, 35, 35, 34, 34, 33, 33, 32, 31 Sekunden, so bleibt die wirkliche Grösse des Winkels noch zu ermitteln.

Die von Alters her geläufige und mit der demnächst zu entwickelnden Theorie im Einklange stehende Methode schreibt dann vor, das arithmetische Mittel sämtlicher Beobachtungen zu neh-

men, wodurch man den gesuchten Winkel $= n$ Grade m Minuten 36 Sekunden erhält. — Oder man habe bei einer Flurvermessung die drei Winkel eines ebenen Dreiecks einzeln gemessen und die Summe kleiner oder grösser als 180° gefunden: man wird dazu geneigt sein, und die Theorie bestätigt die Richtigkeit des Verfahrens, dass man die Differenz auf alle drei Winkel zu gleichen Theilen vertheilt.

4. Das Princip des arithmetischen Mittels ist als richtig angenommen und benutzt, lange bevor es wissenschaftlich begründet und seine Anwendbarkeit im gegebenen Fall nachgewiesen war. Was es besonders empfiehlt, ist zunächst die Einfachheit der zu Grunde liegenden Anschauungen und des auf sie begründeten Verfahrens, sodann die gleichmässige Würdigung der sämtlichen gleich unzuverlässigen Beobachtungen, wodurch es möglich wird, einen Mittelwerth als Werth der gesuchten Grösse zu finden, dessen Differenzen von den einzelnen Beobachtungen zusammen genommen gleich Null werden. Denn bei dem Mittelwerth von 36 Sekunden erhielte man als Unterschiede

einerseits $+5, +4, +4, +3, +2, +2, +1$ zusammen $= +21$
 andererseits $-1, -1, -2, -2, -3, -4, -5$ zusammen $= -21$
 und die Summe dieser Differenzen, welche offenbar eben nichts anderes als die gemachten Beobachtungsfehler darstellen, wird Null.

5. Indessen so einfach wie der genannte sind sehr viele der hieher gehörigen in der Praxis vorkommenden Fälle nicht; vielmehr stellen sich bei ihnen, wie wir alsbald weiter sehen werden, der directen Anwendung des arithmetischen Mittels ganz eigenthümliche Schwierigkeiten in den Weg, und so war Veranlassung gegeben, sich nach andern Methoden der Auffindung des richtigen Werths der Unbekannten umzusehen. Der oben genannte Fall z. B. enthält die wiederholte Messung eines einzigen Winkels von einem gegebenen Punkte aus. Der gewöhnliche Fall ist aber der, dass von einer Station aus eine ganze Reihe anderer Punkte, 1, 2, 3, 4, 5 eingeschnitten werden, und man nun nicht allein die Winkel zwischen den zunächst auf einander folgenden Örtern, also $< 1. 2, < 2. 3, < 3. 4$, mit beliebigen Repetitionen vielleicht, misst, sondern auch allerlei Combinationen der Winkel, also $< 1. 3, < 1. 5, < 2. 4$ etc. sich durch directe Ablesung verschafft. Dann bewirken die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, dass z. B. $< 1. 4$ nicht $= < 1. 2 + < 2. 3 + < 3. 4$ erhal-

ten wird, sondern um ein Gewisses grösser oder kleiner, ebenso $< 2 \cdot 4$ nicht $= < 2 \cdot 3 + < 3 \cdot 4$ u. s. f. Stellt man dann aber alle Beobachtungen zusammen, so wird man auf eine Anzahl Gleichungen geführt, in denen die beobachteten Winkelwerthe nebst den etwaigen Repetitionszahlen die Constanten — in anderen Fällen natürlich gewisse andere Werthe, von denen man die Unbekannten abhängig weiss —, die gesuchten einzelnen Winkel die Unbekannten bilden. Bei der Aufstellung der Gleichungen wird aber einer der drei möglichen Fälle eintreten, je nach der Ausdehnung, in welcher man die Beobachtungen hat anstellen können: entweder führen die Beobachtungen auf gerade soviel Gleichungen, als Unbekannte da sind; dann zeigt die gewöhnliche Algebra, wie die Gleichungen zu lösen, die Unbekannten zu finden sind; oder die Beobachtungen gestatten nicht, so viel Gleichungen zu bilden, als Unbekannte da sind, weil sie aus irgend einem Grunde unvollständiger geblieben sind als im ersten Fall; dann ist und bleibt die Aufgabe und ihre Lösung eine unbestimmte; oder endlich drittens die Beobachtungen führen, wie schon oben angedeutet, auf mehr Gleichungen, als Unbekannte da sind. Dieser letzte Fall, n Gleichungen mit nur $n - m$ Unbekannten zu lösen, ist derjenige, welcher uns hier eigentlich beschäftigen soll; zu seiner Lösung dient die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate.

6. Aus denselben Gründen, warum wir vorhin es als unpassend bezeichnet haben, einzelne Beobachtungen zu verwerfen, darf man jetzt nicht etwa einzelne Gleichungen ausscheiden, um so etwa die Anzahl der Gleichungen auf die Anzahl der Unbekannten zu reducieren. — Es bliebe also vielleicht nur übrig, wenn n Gleichungen mit $n - m$ Unbekannten zur Lösung gegeben sind, jeweilig m Gleichungen bei Seite zu stellen und aus den übrigen $n - m$ Gleichungen sich Werthe der Unbekannten im gewöhnlichen Eliminationsverfahren zu verschaffen. Da aber $n - m$ Gleichungen aus einer Anzahl von n Gleichungen sich

$\frac{n \cdot (n - 1) (n - 2) \dots (m + 1)}{(n - m)!}$ mal zusammenstellen lassen,

so würde man ebenso viele Gruppen von Werthen der Unbekannten erhalten, als Combinationen der Gleichungen möglich waren; vergleicht man nun aber die erhaltenen Werthe der Unbekannten in den verschiedenen Gruppen mit einander, so zeigt die Erfahrung, dass gerade wegen der durch die Beobachtungsfehler un-

richtig gewordenen Constanten der ursprünglichen Gleichungen die berechneten Werthe der Unbekannten um mehr oder minder von einander abweichen, je nach der Gruppe von Gleichungen, aus der sie berechnet sind. Keins von allen erhaltenen Systemen von Werthen wird, substituiert in die vorhandenen Gleichungen, dieselben sämmtlich befriedigen, wie das geschieht, wenn man aus n Gleichungen n Unbekannte bestimmt; vielmehr werden, wenn man sich unter $M_1, M_2, M_3 \dots$ die aus der Beobachtung, unter $F_1, F_2, F_3 \dots$ die aus der Substitution hervorgegangenen Werthe der Functionen der Unbekannten vorstellt, Differenzen von der Grösse $F_1 - M_1, F_2 - M_2, F_3 - M_3 \dots$ andeuten, dass die berechneten Werthe der Unbekannten nicht als unbedingt richtig anzusehen sind. Soviel leuchtet indessen sofort ein, dass man Recht hat, demjenigen System von berechneten Werthen der Unbekannten einen höheren Grad von Glaubwürdigkeit beizulegen, durch welches die übrig bleibenden Differenzen von der Form $F - M$ im Allgemeinen kleiner werden, und dass man befugt ist, in einer allerdings noch näher festzustellenden Weise, die übrig bleibenden Differenzen oder Fehler, wie man sie gewöhnlich nennt, als Kennzeichen zu benutzen, in wie weit man sich dem wahren Werthe der Unbekannten genähert habe.

7. Wären zuvörderst die übrig bleibenden Fehler einzeln gleich Null gewesen, wie sich die Sache bei n Gleichungen mit n Unbekannten immer stellt, so waren die Resultate der Lösung absolut richtige. Wenn sie nun aber einzeln nicht Null sind, vielmehr im positiven und negativen Sinn sich von der Null entfernen, und man nun in der Abweichung von der Null ein Kriterium der Zuverlässigkeit der berechneten Werthe der Unbekannten finden will, so ist das Princip festzustellen, nach welchem dabei verfahren werden muss. Abgesehen von einigen bezüglichlichen Vorschlägen des gelehrten Paters Boscowich, so hat zuerst Laplace bei Gelegenheit der Untersuchungen über Form und Grösse des Erdmeridians eine Methode entwickelt, durch welche er unter allen möglichen Systemen von Werthen der Unbekannten das der Wahrheit zunächst kommende finden zu können glaubte. Er entwickelte sie im zweiten Bande der Mechanik des Himmels, im 39sten und 40sten Lehrsatz des fünften Capitels im dritten Buche, wo er verlangt: „erstens dass die Summe der Fehler, mit ihren zugehörigen Vorzeichen addiert, gleich Null, und zweitens, dass die Summe dieser Fehler, wenn man sie sämmtlich positiv setzt, ein Kleinstes

sei.“ Ueber die Resultate, welche er mit Hülfe dieses Princip in Betreff des Erdmeridians erhält, werden wir weiter unten einige Mittheilungen machen, indem wir sie mit den aus anderen Principien hergeleiteten Resultaten zusammenstellen; das Princip von Laplace selbst ist nicht lange nachher schon als unhaltbar erkannt. Um zunächst jenes Princip an einem Zahlenbeispiel zu erproben, so seien die Ergebnisse der Messung z. B. die Grösse eines Winkels n Grade m Minuten p Sekunden, und ausserdem noch 0,41, 0,40, 0,40, 0,39, 0,38, 0,38, 0,37, 0,35, 0,35, 0,34, 0,34, 0,33, 0,33, 0,32, 0,31 Sekunden; setzt man nun als wahrscheinlichsten Werth der unbekannten Grösse des Winkels ausser den unbestreitbaren Graden, Minuten und vollen Sekunden, 0,36 Sekunden, so würde die Summe der übrig bleibenden Fehler mit ihren Vorzeichen addiert, gleich Null werden, während die Fehler, sämmtlich positiv genommen, zur Summe 42 geben. Hätte man indessen 0,35 Sekunden als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten angenommen, so wäre die Summe der Differenzen ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen nur 41 geworden, während die algebraische Summe der Fehler jetzt $+ 28 - 13 = + 15$ giebt. In noch höherem Grade unbestimmt würde die Wahl des passendsten Werths der Unbekannten im folgenden Beispiele werden. Gesetzt, die eine der Unbekannten, z. B. p , sei bestimmt zu $n + 33$, $n + 35$, $n + 40$, $n + 47$, wo die Ziffern vielleicht wieder die Sekunden vorstellen mögen, um welche die Resultate noch von einander abweichen, und man wollte nun einen Mittelwerth wählen, so dass die Summe der übrig bleibenden Fehler ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen ein Kleinstes werde, so würde nicht allein das arithmetische Mittel $n + 38,75$, sondern auch $n + 35$, $n + 36$, $n + 37$, $n + 38$, $n + 39$, $n + 40$ alle als Summe der übrig bleibenden Fehler gleichviel, nämlich 19 geben; jene Werthe aber für gleich zulässige Werthe der Unbekannten zu erklären, würde eine Ungereimtheit sein. — Da sich endlich zeigen lässt, dass nach jenem Princip im Grunde nur genau soviel Gleichungen wirklich bei der Bestimmung der Unbekannten vertreten werden, als Unbekannte da sind, die übrigen Gleichungen aber nur nebenher auf die Wahl der Werthe influieren, so hat man das Princip von Laplace mit Recht längst verlassen.

8. Am wirksamsten ist bekanntlich Gauss jenem Princip der kleinsten Summe der übrig bleibenden Fehler entgegen ge-

treten, dadurch dass er ein neues, jetzt allgemein als das praktisch beste angenommene, und theoretisch als richtig erwiesenes Princip an die Stelle des früheren setzte. Nicht allein dass er damit das auch unmathematische Verfahren des Zeichenwechsels der übrig gebliebenen Fehler ein für allemal beseitigte, ferner keine Zweifel übrig liess, welches System von Werthen der Unbekannten am besten sämtlichen Gleichungen Genüge leiste: das Hauptverdienst der Gauss'schen Methode, nach welcher die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler als Kriterium für die Annäherung an den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten angenommen wird, besteht darin, dass sie, in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Theorie, dem bis dahin vernachlässigten Umstande Rechnung trägt, dass die Beobachtungsfehler nicht im einfachen, sondern im quadratischen Verhältnisse ihrer Grössen unwahrscheinlich sind. Gilt schon unter Beobachtern für ausgemacht, dass gewisse Fehlergrössen geradezu unmöglich sind, so müssen grössere Fehler auch im höhern Verhältniss als dem directen ihrer Grössen unwahrscheinlich sein als kleinere; nach Gauss setzt man die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von der Grösse 8 zu begehen gegenüber einem Fehler von der Grösse 4, nicht $= \frac{1}{2}$, sondern nur $= \frac{1}{4}$. Da höhere Potenzen, z. B. die 4ten, 6ten der Grössenverhältnisse der Fehler, welche unter Umständen zulässig sein können, die Rechnungen auf unverhältnissmässige Weise erschweren, so ist Gauss bei den zweiten stehen geblieben, und ist nach ihm also die kleinste Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Maassstab für die beste Uebereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Werthen der Unbekannten. Da hier nicht der Ort ist, weder die Geschichte der Gauss'schen Untersuchungen von dem Jahre 1795 an, wo er zuerst durch die Kritik einer Reihe Lösungen, welche Lambert über hierher gehörige Aufgaben gegeben, auf seine Methode geführt wurde, bis zu der glänzenden Bestätigung der Richtigkeit und Zweckmässigkeit derselben bei Gelegenheit der Berechnung der Bahn der eben entdeckten Ceres 1801 zu verfolgen, noch auch die folgenden theoretischen Untersuchungen in seinen und seiner Nachfolger Schriften wiederzugeben, so möge das Vorstehende zur Einführung genügen; wir wenden uns gleich zu dem eigentlichen Zweck dieser Schrift, Anfängern zunächst die Praxis der Methode der kleinsten Quadrate an ausführlich durchgerechneten Beispielen zu erläutern.

II. Das Verfahren bei der Behandlung von Aufgaben, welche auf lineäre Gleichungen führen.

9. Bevor gezeigt werden kann, wie man die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu einem kleinsten Werthe herabzudrücken vermag, bedarf der in No. 6 des vorigen Abschnitts erhaltene Ausdruck für dieselben, $F - M$, einer nähern Erläuterung. Da dort gesagt wurde, dass man sich unter F einen der Werthe vorstellen möge, welchen die Function nach Substitution eines der Systeme von Werthen der Unbekannten annähme, welche man durch Combination der gegebenen Gleichungen sich verschaffen könne, so könnte es scheinen, als ob wirklich erst eine Lösung der gegebenen Gleichungen in solcher Weise bewerkstelligt werden müsse, um dann vielleicht erst das Verfahren anzuwenden, durch welches die Summe der Quadrate der Fehler zu einem Minimum gemacht würde.

Nun aber leuchtet ein, dass jene Werthe von der Form $F - M$ nur dann die wirklichen Fehler bedeuten, wenn man sich unter F den einen, wahren, Werth der Function, nicht aber die aus der Substitution hervorgegangenen, möglichen Falls vielfach verschiedenen Werthe derselben vorstellt. Letztere sind vielmehr nur von ganz sekundärer Bedeutung, und werden als Näherungswerthe allerdings häufig gebraucht, dann aber auf kürzerem Wege gefunden; dafür aber ist freilich der wahre Werth der Function gerade unbekannt, und ihr durch Beobachtung erhaltener Werth notorisch fehlerhaft. Wir werden indessen bald sehen, dass die folgende Entwicklung es umgeht, den wahren Werth der Function F , in Zahlen ausgedrückt zu kennen, und demungeachtet die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu einem Minimum macht.

10. Die äussere Form der Functionen ist natürlich je nach den Umständen eine höchst verschiedene. Sind z. B. Horizontalwinkel beobachtet, indem man von einer Richtung AO aus eine Reihe von Oertern 1, 2, 3, 4 eingeschnitten hat, und man betrach-

set die Winkel 0—1, 0—2, 0—3, 0—4, die wir der Kürze halber mit p, q, r, s bezeichnen wollen, als die Unbekannten, so ergeben Messungen der Winkel

$$\begin{array}{llllll} 0-1 & \text{mit dem abgelesenen Werth } M_1, & \text{die Gl. } M_1 = & p \\ 1-2 & \text{,, ,, ,, ,, } M_2, & \text{,, ,, } M_2 = & -p + q \\ 0-2 & \text{,, ,, ,, ,, } M_3, & \text{,, ,, } M_3 = & q \\ 1-3 & \text{,, ,, ,, ,, } M_4, & \text{,, ,, } M_4 = & -p + r \\ 2-3 & \text{,, ,, ,, ,, } M_5, & \text{,, ,, } M_5 = & -q + r \end{array}$$

u. s. f. Gleichungen, oder Functionen der p, q, r , in welchen allerdings die p, q, r nur einen einzigen, wahren Werth haben, die fehlerhaften Werthe M_1, M_2 etc. aber bewirken, dass dieser wahre Werth nicht ohne Weiteres erkannt werden kann. Drückt man nun die wahren Werthe $p, -p + q, q, -p + r, -q + r \dots$ nach einander durch $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \dots$ aus, so bedeuten $F_1 - M_1, F_2 - M_2, F_3 - M_3$ etc. die wirklich gemachten Fehler. Man sucht nun Werthe von p, q, r, s , welche dem wahren Werthe so nahe kommen, dass die Quadratsumme der dann noch übrig bleibenden Fehler so klein als möglich werde.

In einem andern Fall ist vielleicht eine Unbekannte abhängig von gewissen Constanten und einer Function eines gewissen Winkel α , und ergeben die Beobachtungen verschiedene Werthe, wenn sich der Winkel ändert. Man würde so auf Gleichungen geführt von der Form

$$M_1 = p + q \sin. \alpha_1$$

$$M_2 = p + q \sin. \alpha_2$$

$$M_3 = p + q \sin. \alpha_3 \text{ u. s. f.}$$

Es ist wieder möglich, den p und q solche Werthe zu geben, dass die Grössen der Functionen $p + q \sin. \alpha$ oder allgemein F so ausfallen, dass $(F_1 - M_1)^2 + (F_2 - M_2)^2 + (F_3 - M_3)^2 + \dots$ eine möglichst kleinste Summe geben, und man darf sich überzeugt halten, dass man mit diesen Werthen für p und q ihre wahren Werthe so nahe erreicht habe, als überhaupt die vorliegenden Beobachtungen es gestatten.

11. Auf welche Weise man nun die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu einem Minimum machen könne, zeigt der bekannte Satz der Differentialrechnung, nach welchem die Differentialverhältnisse der Function, die man zu einem Minimum machen will, in Bezug auf jede der zu bestimmenden Grössen einzeln gleich Null zu setzen sind. Hier soll eine Function der Unbekannten $p, q, r, \dots$, nämlich

10 A. Lineäre Gleichungen mit einer Unbekannten.

$$(F_1 - M_1)^2 + (F_2 - M_2)^2 + (F_3 - M_3)^2 + \dots$$

zu einem Minimum gemacht werden: man hat also die partiellen Differentialquotienten dieser Summe gleich Null zu setzen, und erhält unter Wegwerfung des gleichen Factors 2 die Gleichungen

$$(F_1 - M_1) \frac{dF_1}{dp} + (F_2 - M_2) \frac{dF_2}{dp} + (F_3 - M_3) \frac{dF_3}{dp} + \dots = 0$$

$$(F_1 - M_1) \frac{dF_1}{dq} + (F_2 - M_2) \frac{dF_2}{dq} + (F_3 - M_3) \frac{dF_3}{dq} + \dots = 0$$

$$(F_1 - M_1) \frac{dF_1}{dr} + (F_2 - M_2) \frac{dF_2}{dr} + (F_3 - M_3) \frac{dF_3}{dr} + \dots = 0$$

u. s. f. Da man nun solcher Gleichungen offenbar so viele bekommt, als Unbekannte da sind, so wird man diese dann nach dem gewöhnlichen Eliminationsverfahren aus ihnen entwickeln können, womit die Lösung der Aufgabe, d. h. die Auffindung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten zunächst als vollführt anzusehen ist. Da alle übrigen Abkürzungen etc. der Rechnungen am besten an wirklichen Beispielen zu zeigen sind, so wenden wir uns sofort zu der weiteren Behandlung derjenigen Aufgaben, welche auf Gleichungen dieser Art führen, um ihnen späterhin die Behandlung der Aufgaben folgen zu lassen, welche auf transcendente Functionen führen.

A. Lineäre Gleichungen mit einer Unbekannten. Arithmetisches Mittel.

12. Gesetzt, man habe zur Ermittlung des Werthes nur einer Unbekannten, die mit p bezeichnet werden möge, eine Reihe von n gleich unzuverlässigen Beobachtungen dieses Werthes angestellt, deren Ergebnisse $M_1, M_2, M_3 \dots M_n$ seien. Die zu lösenden Gleichungen wären dann

$$M_1 = p$$

$$M_2 = p$$

$$M_3 = p$$

u. s. f. F sei der der Wahrheit zunächst kommende Werth von p , so hat man nach No. 11 als Bedingungsgleichung, dass die Summe der Quadrate der $F - M$ ein Minimum werde, die Gleichung

$$(F - M_1) + (F - M_2) + (F - M_3) + (F - M_4) \dots = 0,$$

also
$$F = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \dots}{n} = p$$

mit welcher Gleichung offenbar ausgesprochen ist, dass der richtigste Werth für p das arithmetische Mittel aus sämtlichen beobachteten Werthen des p sei. In einem solchen Falle also, wenn zur Bestimmung einer Unbekannten unmittelbare Messungen derselben vorgenommen werden können, und von ihnen in Bezug auf Zuverlässigkeit keine einen besondern Vorzug vor den übrigen verdient, giebt das arithmetische Mittel den möglichst richtigen Werth der Unbekannten.

13. Bei Beobachtungen dieser Art, zu denen das tägliche Leben so gut wie wissenschaftliche Untersuchungen die Fülle Beispiele bieten, ereignet es sich häufig, dass verschiedene Messungen dieselben Werthe ergeben, dass man z. B. für p α mal den Werth M_1 , β mal den Werth M_2 , γ mal den Werth M_3 etc. aus der unmittelbaren Beobachtung erhält. Da die Wiederkehr desselben Werthes die Wahrscheinlichkeit erhöht, dass er dem richtigen Werth des p näher liege als andere, welche weniger oft erhalten sind, so muss dieser Umstand berücksichtigt werden. Man würde aber jetzt α mal den Fehler $F - M_1$, β mal den Fehler $F - M_2$ etc. übrig gelassen haben und man müsste jetzt

$\alpha \cdot (F - M_1)^2 + \beta (F - M_2)^2 + \gamma (F - M_3)^2 + \dots + \nu (F - M_n)$ zu einem Minimum machen. Dafür lautet aber die Bedingungsgleichung

$$\alpha \cdot (F - M_1) + \beta (F - M_2) + \gamma (F - M_3) + \dots + \nu (F - M_n) = 0$$

folglich
$$F = \frac{\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 + \dots + \nu \cdot M_n}{\alpha + \beta + \gamma + \dots + \nu}$$

d. h.
$$p = \frac{\sum (\alpha \cdot M)}{\sum \alpha} = \frac{[\alpha \cdot M]}{[\alpha]}$$
 wenn wir der Gaussischen

Bezeichnungsweise folgen, d. h. man hat jeden beobachteten Werth mit der Zahl, welche seine Wiederkehr anzeigt, einzeln zu multiplicieren, die Producte zu addieren, und deren Summe durch die Menge der überhaupt angestellten Beobachtungen zu dividieren.

Ergibt z. B. eine Winkelmessung mit einem 10 Sekunden directe Ablesung gestattenden Sextanten 4mal den Werth eines Winkels zu $34^\circ 53' 10''$, 6mal $34^\circ 53' 13'',33$, 7mal $34^\circ 53' 7'',75$, so wird der zuverlässigste Werth für den gesuchten Winkel oder

$$\begin{aligned} p &= \frac{4 \times 34^\circ 53' 10'' + 6 \times 34^\circ 53' 13'',33 + 7 \times 34^\circ 53' 7'',75}{4 + 6 + 7} \\ &= \frac{17 \times 34^\circ 53' 7'',75 + 4 \times 2'',5 + 6 \times 5'',58}{17} \end{aligned}$$

12 A. Lineäre Gleichungen mit einer Unbekannten.

$$= 34^{\circ} 53' 7'',75 + \frac{4 \times 2'',5 + 6 \times 5'',58}{17}$$

$$= 34^{\circ} 53' 10'',31,$$

indem man vorab den niedrigsten der gemessenen Werthe als Näherungswerth ansieht.

14. Untersucht man die Gründe, warum solche directe Beobachtungen z. B. mit dem Sextanten so von einander abweichende Resultate ergeben, so wird man die nächste und häufigste Erklärung im fehlerhaften Einvisieren suchen können, da Ablesungsfehler bei geschickter Vermeidung der parallactischen Winkel, und Veränderungen des Indexfehlers bei solide construierten Instrumenten jedenfalls bedeutend gegen jene zurücktreten. Man kann aber häufig eine Erklärung auch im verschiedenen Zustande der Atmosphäre finden, der verschiedene Strahlenbrechungen verursacht, und sich vorstellen, dass jene Werthe Durchschnittswerthe aus 4, 6 und 7 Beobachtungen an z. B. 3 verschiedenen Tagen waren. Das fehlerhafte Einvisieren ist auch der Hauptgrund, weshalb Messungen mit Repetitionsinstrumenten nach α , β , γ ... Repetitionen abweichende Resultate für die beobachteten Werthe ergeben. Aus dem Vorstehenden erhellt, dass man auch nach solchen Messungen die Repetitionszahlen den Durchschnittswerthen der einzelnen Winkelmessungen als Factoren beizulegen hat, und die Summe der Producte durch die Summe der Repetitionszahlen dividieren muss, um den wahrscheinlichsten Werth der gesuchten Winkelgrösse zu erhalten. Diese Repetitionszahlen, oder wie oben die Zahlen, welche die Wiederkehr einer gleichen Beobachtung angaben, überhaupt alle Zahlwerthe, welche die Zuverlässigkeit einzelner Beobachtungen ausdrücken, nennt man die Gewichte dieser Beobachtungen. Wir werden alsbald weiter auf sie zurückkommen.

15. Im vorstehenden Beispiel erhält man als Beobachtungsfehler

$$F - M_1 = + 0'',31 \text{ also } (F - M_1)^2 = 0,0961 \text{ u. } 4(F - M_1)^2 = 0,3844$$

$$F - M_2 = - 3'',02 \text{ „ } (F - M_2)^2 = 9,1204 \text{ u. } 6(F - M_2)^2 = 54,7224$$

$$F - M_3 = + 2'',56 \text{ „ } (F - M_3)^2 = 6,5536 \text{ u. } 7(F - M_3)^2 = 45,8752$$

$$\text{Summe} = 100,9820$$

die kleiner ist, als sie für jeden andern Werth des Winkels ausgefallen wäre.

Setzte man z. B. $p = 34^{\circ} 53' 10'' = F$, so hätte man erhalten

$$\begin{array}{rcl}
 F-M_1 = 0, & \text{also } (F-M_1)^2 = 0, & 4(F-M_1)^2 = 0 \\
 F-M_2 = -3'',33 & ,, & (F-M_2)^2 = 11,0889, \quad 6(F-M_2)^2 = 66,5334 \\
 F-M_3 = +2'',25 & ,, & (F-M_3)^2 = 5,0625, \quad 7(F-M_3)^2 = 35,4375 \\
 & & \hline
 & & \text{Summe} = 101,9709
 \end{array}$$

Dagegen für $p = 34^\circ 53' 10'',50 = F$ erhalte man

$$\begin{array}{rcl}
 F-M_1 = +0,50, & \text{also } (F-M_1)^2 = 0,2500, & 4(F-M_1)^2 = 1,0000 \\
 F-M_2 = -2,83, & ,, & (F-M_2)^2 = 8,0089, \quad 6(F-M_2)^2 = 48,0534 \\
 F-M_3 = +2,75, & ,, & (F-M_3)^2 = 7,5625, \quad 7(F-M_3)^2 = 52,9375 \\
 & & \hline
 & & \text{Summe} = 101,9909
 \end{array}$$

Endlich würden die Summen der einzelnen Fehler mit und ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen geworden sein

$$\begin{array}{rcl}
 \text{für } p = 34^\circ 53' 10'',31 & \text{algebr. Summe} = -0,15, & \text{absol. Sum.} = 5,89 \\
 ,, \quad p = 34^\circ 53' 10'',00 & ,, & = -1,08, \quad ,, = 5,58 \\
 ,, \quad p = 34^\circ 53' 10'',50 & ,, & = +0,42, \quad ,, = 6,08
 \end{array}$$

Während also für den wahrscheinlichsten Werth des Winkels $p = 34^\circ 53' 10'',31$ auch die algebraische Summe der übrig bleibenden Fehler sich kleiner herausstellt, als sie für andere Werthe für p wird, ist die Summe der Fehler, ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen genommen, für $p = 34^\circ 53' 10''$ kleiner geworden als für die anderen Werthe (vergl. No. 7).

16. Zu einem andern Beispiel über die Anwendbarkeit des arithmetischen Mittels diene eine Reihe von Beobachtungen, welche im physikalischen Cabinet des Gymnasiums zu Jever zum Zweck der Reduction der Angaben einer von mir construierten Tangenten-Boussole auf chemisches Maass angestellt wurden. Da bei diesem Instrumente die Stromstärke S sich gleich der horizontalen Componente des Erdmagnetismus, T , multipliciert mit der trigonometrischen Tangente des Ablenkungswinkels α ergibt so hat man im Allgemeinen die Gleichung $S = T \cdot \text{tang } \alpha$; daraus folgt $S = T$ für $\alpha = 45^\circ$, also ein Ausdruck für die Stärke des Erdmagnetismus in chemischem Maass, während für jeden andern Werth von α , $T = S \cdot \text{cot } \alpha$ wird. Die Werthe von S in Cubikcentimetern Knallgas, das natürlich über Quecksilber aufgefangen wurde, nebst den zugehörigen Werthen von α ergeben sich aus folgender Zusammenstellung der Beobachtungen:

14 A. Lineäre Gleichungen mit einer Unbekannten.

Bunsen'sche Becher von Stöhrer, Zahl der- selben	Menge d. Beobach- tungen, rsp. deren Gewichte	α		α mittlerer Werth	Knallgas- meng. in Cubikcen- timeter in 60 Sec.	mittlere Mengen Knallgas in 60 Sec.
		am An- fang jeder	am Ende Beobachtung			
8	1ste	29°	29° 30'		24 cc.	
	2te	29°	28° 45'	29° 1'	23,25	23,58
	3te	29°	28° 50'		23,50	
7	1ste	26°	26°		21	
	2te	25° 30'	26°	25° 55'	20	20,67
	3te	26°	26°		21	
6	1ste	23°	23°		17,75	
	2te	23°	22° 50'	23° 0'	18	17,83
	3te	23° 10'	23°		17,75	
5	1ste	19°	19°		14,50	
	2te	19°	19°	19° 0'	14,50	14,50
4	1ste	14°	14°		10,25	
	2te	14°	14°	14° 10'	10	10,08
	3te	14° 30'	14° 30'		10	
3	1ste	9° 30'	9°		4,75	
	2te	9	9°	9° 8'	4,50	4,63
4	1ste	14° 30'	14°	14° 15'	10,25	10,25
5	1ste	16°	16°	16° 0'	14,00	14,00
6	1ste	21°	21°	21°	17,50	17,50
7	1ste	25°	24° 30'		21,00	
	2te	24° 30'	24° 30'	24° 38'	21,00	21,00
8	1ste	28°	28°	28°	24,50	24,50

Der Barometerstand war 28" 2"', 29 Par. bei einer Temperatur von 7°,3 R., während die Temperatur des Gases zu durchgängig 5° R. = 6°,2 C. anzunehmen war.

An der Verschiedenheit der Werthe des Ablenkungswinkels α , die sich bei verminderter und vermehrter Anzahl der Becher herausstellt, ist hauptsächlich die Trägheit der Nadel Schuld, welche der abnehmenden und zunehmenden Stromstärke nicht gleich rasch folgte; die Mittelwerthe dürften deshalb um so grösseres Zutrauen verdienen.

Die Beobachtungen führen nun auf die Gleichungen

23,58 = $T.tang\ 29^{\circ}1'$,	daraus $T = 42,50$,	mit dem Gewichte 3,	also = 127,50
20,67 = $T.tang\ 25^{\circ}55'$,	„ $T = 42,54$,	mit dem Gewichte 3,	also = 127,62
17,83 = $T.tang\ 23^{\circ}$,	„ $T = 42,01$,	mit dem Gewichte 3,	also = 126,03
14,50 = $T.tang\ 19^{\circ}$,	„ $T = 42,10$,	mit dem Gewichte 2,	also = 84,20
10,08 = $T.tang\ 14^{\circ}10'$,	„ $T = 39,93$,	mit dem Gewichte 3,	also = 119,79
4,63 = $T.tang\ 9^{\circ}8'$,	„ $T = 28,80$,	mit dem Gewichte 2,	also = 57,60
10,25 = $T.tang\ 14^{\circ}15'$,	„ $T = 40,36$,	mit dem Gewichte 1,	also = 40,36
14,00 = $T.tang\ 16^{\circ}$,	„ $T = 48,82$,	mit dem Gewichte 1,	also = 48,82
17,50 = $T.tang\ 21^{\circ}$,	„ $T = 45,07$,	mit dem Gewichte 1,	also = 45,07
21,00 = $T.tang\ 24^{\circ}38'$,	„ $T = 45,80$,	mit dem Gewichte 2,	also = 91,60
24,50 = $T.tang\ 28^{\circ}$,	„ $T = 46,08$,	mit dem Gewichte 1,	also = 46,08

Man erhält also $T = \frac{[\alpha \cdot M]}{[\alpha]}$ laut No. 13 hier = $\frac{914,67}{22}$
 $= 41,58$. Nun war der auf 0° R. reducierte Barometerstand $28''1''',69$
 $= 337''',69$; also die auf 0° R. Temperatur reducierte Gasmenge
würde geworden sein, bei einem Barometerstande von $28''$ Par.

$$\begin{aligned}
 & \frac{41,58 \cdot 337,69}{336} \cdot \frac{1}{1 + 0,003665 \cdot 6^{\circ},2\text{ C.}} \\
 &= \frac{41,58 \cdot 337,69}{336 \cdot 1,022723} \\
 &= 40,86. —
 \end{aligned}$$

Die Menge Cubik-Centimeter Knallgas oder S , welche ein galvanischer Strom bei einem Ausschlagswinkel jener Boussole $= \alpha$ am bezeichneten Ort liefern würde, kann also gefunden werden durch die Gleichung

$$S = 40,86 \cdot \text{tang. } \alpha$$

16 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

vorausgesetzt, dass das Barometer auf 28" Par. bei 0° Temperatur steht.

Anm. Da Weber's Stromeinheit eine Stärke hat, um in 1 Minute 1,0477 C.-Cent. zu entwickeln, so würde ein Strom, der an jener Boussole einen Ablenkungswinkel von 45° hervorbrächte, nach chemischem Maass eine Stärke von 40,86, nach Weber's absolutem Maass eine Stärke von $\frac{40,86}{1,0477} = 38,90$ haben. Wenn nun der Durchmesser des Ringes jener Boussole 300^{mm} betrug, und die Stromstärke nach absolutem Maass ausgedrückt gefunden wird durch $s = \frac{T \cdot r}{2\pi}$, wo r den Radius der Boussole bezeichnet, so erhielt man jetzt die horizontale Componente der Intensität des Erdmagnetismus oder

$$T = \frac{s \cdot 2\pi}{r} = \frac{38,90 \times 6,282 \dots}{150} = 1,6294.$$

Die Data jener Beobachtungen stammen aus dem Jahre 1856. Für 1852 ergibt sich aus den Lamont'schen Karten für T ein Werth von 1,71 (vergl. J. Müller kosm. Physik, pag. 481), also ziemlich übereinstimmend mit dem vorstehenden Resultat.

B. Aufgaben, welche auf lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten führen.

17. Die allgemeine Form der Functionen der Unbekannten $p, q, r, s \dots$, deren beobachtete Werthe durch die Zahlwerthe M_1, M_2, M_3 u. s. w. bezeichnet werden mögen, wäre

$$\begin{aligned} a_1 p + b_1 q + c_1 r + d_1 s + \dots &= M_1 \\ a_2 p + b_2 q + c_2 r + d_2 s + \dots &= M_2 \\ a_3 p + b_3 q + c_3 r + d_3 s + \dots &= M_3 \\ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

in welchen die $a_1, b_1, c_1 \dots, a_2, b_2 \dots, a_3, b_3 \dots$ u. s. f. gewisse von der Natur der Unbekannten abhängige Factoren bedeuten, deren nähere Feststellung in jedem concreten Fall also vorbehalten bleibt. Voraussetzung ist wieder, dass die Anzahl der gegebenen Gleichungen erheblich grösser sei als die der Unbekannten; man sucht nun wiederum Werthe für die Unbekannten $p, q, r \dots$, welche sämtliche Gleichungen möglichst befriedigen, d. h. die so beschaffen sind, dass die Werthe der Functionen $a_1 p + b_1 q + c_1 r + \dots, a_2 p + b_2 q + c_2 r + \dots$ u. s. f., die wir nach der Substitution durch F_1, F_2, F_3 u. s. w. bezeichnen, sich so sehr

den beobachteten Werthen derselben Functionen, M_1, M_2, M_3 , nähern, dass die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler, also wieder $(F_1 - M_1)^2 + (F_2 - M_2)^2 + (F_3 - M_3)^2 + \dots$ ein Minimum wird.

Die übrigbleibenden Fehler, $F_1 - M_1$ u. s. w., sind aber auch so auszudrücken:

$$\begin{aligned} F_1 - M_1 &= a_1 p + b_1 q + c_1 r + d_1 s + \dots - M_1 \\ F_2 - M_2 &= a_2 p + b_2 q + c_2 r + d_2 s + \dots - M_2 \\ F_3 - M_3 &= a_3 p + b_3 q + c_3 r + d_3 s + \dots - M_3 \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Die Bedingungsgleichungen für das Minimum der Summe ihrer Quadrate, welche in No. 11 erhalten sind, d. h. die Gleichungen von der Form

$$(F_1 - M_1) \frac{dF_1}{dp} + (F_2 - M_2) \frac{dF_2}{dp} + \dots = 0$$

stellen also die wirklichen Gleichungen

$$(a_1 p + b_1 q + c_1 r + \dots - M_1) a_1 + (a_2 p + b_2 q + \dots - M_2) a_2 + (a_3 p + b_3 q + \dots - M_3) a_3 + \dots = 0$$

$$(a_1 p + b_1 q + c_1 r + \dots - M_1) b_1 + (a_2 p + b_2 q + \dots - M_2) b_2 + (a_3 p + b_3 q + \dots - M_3) b_3 + \dots = 0$$

$$(a_1 p + b_1 q + c_1 r + \dots - M_1) c_1 + (a_2 p + b_2 q + \dots - M_2) c_2 + (a_3 p + b_3 q + \dots - M_3) c_3 + \dots = 0$$

u. s. w. vor, und man erhält soviel Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind. Gleichungen (ω).

Ordnet man jetzt die Gleichungen nach den Unbekannten, und bezeichnet der Kürze halber die hervortretenden Summen

$$a_1^2 p + a_2^2 p + a_3^2 p + \dots a_n^2 p = p (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots a_n^2) \text{ nach Gauss durch } p [a^2]$$

$$a_1 b_1 q + a_2 b_2 q + \dots a_n b_n q = q (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots a_n b_n) \text{ durch } q [ab]$$

und so fort durch alle Gleichungen hindurch, so gehen die eben genannten Gleichungen alsbald über in

$$p [a^2] + q [ab] + r [ac] + s [ad] + \dots - [aM] = 0$$

$$p [ab] + q [b^2] + r [bc] + s [bd] + \dots - [bM] = 0$$

$$p [ac] + q [bc] + r [c^2] + s [cd] + \dots - [cM] = 0$$

$$p [ad] + q [bd] + r [cd] + s [d^2] + \dots - [dM] = 0$$

u. s. w.

Man pflegt diese Gleichungen, deren Anzahl so gross als die der Unbekannten wird, Normalgleichungen zu nennen, im Gegensatz zu den ursprünglichen Gleichungen, in welchen die

18 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Resultate der Beobachtungen zunächst niedergelegt waren. Man kann sich ihre Bildung auch so merken: multipliciert man jede der vorhandenen ursprünglichen Gleichungen mit dem Factor der ersten in ihr vorkommenden unbekannten Grösse, und addiert alsdann alle jetzt erhaltenen Gleichungen, so hat man die erste Normalgleichung; multipliciert man ferner jede ursprüngliche Gleichung mit dem Factor der zweiten in ihr vorkommenden Unbekannten und addiert wiederum sämtliche Gleichungen, so hat man die zweite Normalgleichung, und in ganz ähnlicher Weise fortfahrend die übrigen. Um sich vor etwaigen Rechenfehlern, beziehungsweise Wiederholungen, zu hüten, beachte man, dass in den Normalgleichungen in diagonalen Richtung von links oben nach rechts unten, die Summen der Quadrate aller Factoren a, b, c, d u. s. w., mit welchen die Unbekannten $p, q, r \dots$ beziehungsweise versehen sind, zu den Unbekannten als Factoren hinzutreten, während symmetrisch zu beiden Seiten als gleiche Factoren die Summen $[ab], [ac], [ad], [bd]$ u. s. w. auftreten, wie dies ohne Weiteres aus dem blossen Anblick der Gleichungen ω folgen muss. Damit hängt zusammen, dass die diagonal von links oben nach rechts unten laufenden Factoren nothwendig alle positiv werden, die übrigen Factoren aber im Allgemeinen verschiedene Vorzeichen haben können.

Um die Unbekannten $p, q, r \dots$ zu ermitteln, wende man jetzt nur noch das gewöhnliche Eliminationsverfahren an.

18. So viel im Allgemeinen über die Lösung derartiger Aufgaben, bei denen wir stillschweigend die Voraussetzung haben gelten lassen, dass die einzelnen beobachteten Werthe $M_1, M_2, M_3 \dots$ alle gleichen Grad von Zutrauen verdienen. Sehr häufig ist dies aber, wie wir auch schon oben (13) bemerkten, nicht der Fall, z. B. wenn derselbe Werth M_1 α mal, der Werth M_2 β mal, M_3 vielleicht γ mal wiedergekehrt, oder der Werth M_1 ein Mittelwerth aus α Beobachtungen gleicher Art, M_2 ein Mittelwerth aus β Beobachtungen gleicher Art u. s. w. gewesen wäre, oder wenn vielleicht M_1 das Resultat einer Winkelmessung mit einem Instrumente war, welches direct 20 Sekunden abzulesen gestattet, während M_2 durch ein Instrument, welches 10 Sekunden direct abzulesen erlaubt, erhalten ist; oder ferner wenn die Beobachter in Betreff ihrer Uebung und Erfahrung so verschieden waren, dass eine Beobachtung des einen Beobachters vielleicht so zuverlässig erachtet werden darf als zwei Beobachtungen des andern. Da in

allen diesen und ähnlichen Fällen die Normalgleichungen mehr oder minder bedeutende Veränderungen erleiden werden, so muss die Bestimmung der Gewichte der einzelnen Beobachtungen und ihres Einflusses auf die ganze Rechnung der Bildung der Normalgleichungen voraufgehen.

19. Zur Bestimmung der Gewichte ist das Wesentliche nun schon in No. 13 und 14 gesagt, indem die dortigen Erörterungen noch immer vollkommen gültig bleiben. In anderen Fällen, als den daselbst genannten, besonders aber, wenn es um persönliche Vergleiche oder um Zuverlässigkeit von Zeit- und Höhenmessungen bei Durchgängen von Sternen durch ungleich viele Fäden des Theodolithen oder um Schätzung der Wirkung äusserer Umstände, z. B. Zittern der Luft u. s. w., sich handelt, ist die Bestimmung der Gewichte sehr discretionairer Natur, und deshalb eine Sache des Tackts und der Erfahrung, welche selbst an sich richtige Regeln wie die, dass Ablesungen von Instrumenten von ungleich genauer Theilung, auf 20 und auf 10 Sekunden z. B., im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Genauigkeit der Theilungen, hier also wie 1:4 hinsichtlich ihrer Glaubwürdigkeit stehen, gelegentlich zu modificieren sich versucht fühlt. Sind aber endlich die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \dots \nu$ festgestellt, welche die Güte der einzelnen Beobachtungen charakterisieren sollen, so kann man die Sache wieder so ansehen (vergl. No. 13), als ob man statt je einer Gleichung von der Form

$$a_1 p + b_1 q + c_1 r + d_1 s + \dots = M_1$$

$$a_2 p + b_2 q + c_2 r + d_2 s + \dots = M_2 \quad \text{u. s. w.}$$

deren beziehungsweise $\alpha, \beta, \gamma \dots \nu$ erhalten hätte. Natürlich stellt sich dann auch α mal der Fehler $F_1 - M_1$

$$\beta \text{ mal } \quad \quad \quad F_2 - M_2$$

$$\gamma \text{ mal } \quad \quad \quad F_3 - M_3 \quad \text{u. s. w.}$$

ein, und die Forderung, die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler zu einem Minimum zu machen, wird zur Forderung, dass

$\alpha (F_1 - M_1)^2 + \beta (F_2 - M_2)^2 + \gamma (F_3 - M_3)^2 + \dots \nu (F_n - M_n)^2$
zu einem Kleinsten werde. Diese Bedingung wird aber erfüllt durch die partiellen Gleichungen

$$\alpha (a_1 p + b_1 q + \dots - M_1) a_1 + \beta (a_2 p + b_2 q + \dots - M_2) a_2 + \dots$$

$$\nu (a_n p + b_n q + \dots - M_n) a_n = 0$$

$$\alpha (a_1 p + b_1 q + \dots - M_1) b_1 + \beta (a_2 p + b_2 q + \dots - M_2) b_2 + \dots$$

$$\nu (a_n p + b_n q + \dots - M_n) b_n = 0$$

20 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

u. s. f., welche nach $p, q, r \dots$ geordnet übergehen in die Normalgleichungen

$$p (\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \gamma a_3^2 + \dots) + q (\alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \gamma a_3 b_3 + \dots) + \dots \\ - (\alpha a_1 M_1 + \beta a_2 M_2 + \dots) = 0$$

$$p (\alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \gamma a_3 b_3 + \dots) + q (\alpha b_1^2 + \beta b_2^2 + \gamma b_3^2 + \dots) + \dots \\ - (\alpha b_1 M_1 + \beta b_2 M_2 + \dots) = 0$$

u. s. w.

Man findet also bei Berücksichtigung der Gewichte die Normalgleichungen, indem man jede ursprüngliche Gleichung nicht allein, wie in No. 17, mit dem Factor der Unbekannten, in Bezug auf welche man differentiiert hat, multipliciert, sondern ausserdem auch noch mit der Zahl multipliciert, welche das Gewicht der in der Gleichung niedergelegten Beobachtung angiebt, und dann erst die jetzt erhaltenen Gleichungen addiert.

Allgemein andeuten lässt sich das Verfahren, indem man die Normalgleichungen also schreibt:

$$p \Sigma a^2 (\alpha \dots v) + q \Sigma ab (\alpha \dots v) + r \Sigma ac (\alpha \dots v) + \dots \\ - \Sigma a M (\alpha \dots v) = 0$$

$$p \Sigma ab (\alpha \dots v) + q \Sigma b^2 (\alpha \dots v) + r \Sigma bc (\alpha \dots v) + \dots \\ - \Sigma b M (\alpha \dots v) = 0$$

$$p \Sigma ac (\alpha \dots v) + q \Sigma bc (\alpha \dots v) + r \Sigma c^2 (\alpha \dots v) + \dots \\ - \Sigma c M (\alpha \dots v) = 0$$

u. s. f., oder wenn man sich unter g die Gewichte im Allgemeinen angedeutet denkt, nach Gauss Bezeichnung durch

$$p \cdot [g \cdot a^2] + q [g \cdot ab] + r [g \cdot ac] \dots - [g \cdot a M] = 0$$

$$p [g \cdot ab] + q [g \cdot b^2] + r [g \cdot bc] \dots - [g \cdot b M] = 0$$

u. s. f.

20. Die Erörterungen in No. 17—19 genügen zur Lösung aller Aufgaben, bei denen die Beobachtungen auf mehr und zwar lineäre Gleichungen führen, als Unbekannte vorhanden sind, und man nun die wahrscheinlichsten Werthe sucht, welche die Unbekannten annehmen können. Dass es hierbei, wie überall beim praktischen Rechnen Abkürzungen, Rücksichten, sogenannte Kunstgriffe giebt, welche das gewöhnlich an sich langwierige und mühselige Verfahren zu vereinfachen gestatten, oder welche Controlen und Sicherheit vor Rechenfehlern gewähren, wird sich am besten bei der wirklichen Ausführung der Rechnungen, zu denen wir alsbald übergehen, zeigen lassen.

Aufgabe: Berichtigung eines Nivellements. 21

Unter allen hierher gehörigen Fällen wird offenbar der einfachste derjenige sein, in welchem sämtliche Factoren $a, b, c \dots$ der Unbekannten $p, q, r \dots, = 1$, und die Gewichte der einzelnen Functionen einander gleich sind. Ein solcher Fall ist in der nächstfolgenden Aufgabe enthalten.

21. Berichtigung eines Nivellements.

Das Nivellement der Bahnhöfe zu B, H, L, G, W hat ergeben, dass der Bahnhof zu

$B \dots 115,52$ Fuss über dem Nullpunkt des Pegels der Nordsee
bei A liegt

$H \dots 60,12$	„	„	„	Bahnhof von B	
$H \dots 177,04$	„	„	„	Nullp. des Pegels der Nordsee bei A	
$L \dots 234,12$	„	„	„	Bahnhof von B	
$L \dots 171,00$	„	„	„	„	„ H
$G \dots 632,25$	„	„	„	„	„ L
$G \dots 211,01$	„	„	„	„	„ W
$W \dots 596,12$	„	„	„	„	„ H
$W \dots 427,18$	„	„	„	„	„ L liegt.

Man fragt nach den absoluten wahrscheinlichsten Höhen der genannten Bahnhöfe über dem Nullpunkt des Pegels zu A . Die Data sind einer Zusammenstellung der Höhen der Bahnhöfe auf den Preussischen Eisenbahnen in Heis' Wochenschrift für Astronomie und Physik, 1860, Seite 378, entnommen, und würde der Anfänger dort reichen weitem Stoff zur Uebung finden.

Die gesuchten Höhen sind unsere Unbekannten p, q, r, s, t , und es ergeben sich sofort aus den Beobachtungen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 115,52 &= + p \\
 60,12 &= - p + q \\
 177,04 &= + q \\
 234,12 &= - p + r \\
 171,00 &= - q + r \\
 632,25 &= - r + s \\
 - 211,01 &= - s + t \\
 596,12 &= - q + t \\
 427,18 &= - r + t
 \end{aligned}$$

Multipliziert man nun jede Gleichung, in welcher p vorkommt, mit dem Factor von p (hier also mit $+1$ oder mit -1) und addiert die aus dieser Multiplication hervorgehenden Gleichungen; multipliciert sodann jede der ursprünglichen Gleichungen, in wel-

22 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

cher q vorkommt, mit dem Factor von q und addiert wiederum alle jetzt erhaltenen Gleichungen und fährt so fort, die Gleichungen in Bezug auf r, s und t zu behandeln, so erhält man die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} 1) & -178,72 = 3p - q - r \\ 2) & -529,96 = -p + 4q - r - t \\ 3) & -654,31 = -p - q + 4r - s - t \\ 4) & 843,26 = -r + 2s - t \\ 5) & 812,29 = -q - r - s + 3t \end{aligned}$$

also fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten.

Im gewöhnlichen Eliminationsverfahren würde man wohl thun, $-178,72 = P$, $-529,96 = Q$, $-654,31 = R$, $843,26 = S$, $812,29 = T$ zu setzen, um nicht fortwährend die Ziffern in Rechnung zu führen; man erhält dann leicht

$$\begin{aligned} 6) & 5q - 5r + s = Q - R \\ 7) & -p - q + 5r - 3s = R - S \\ 8) & 15p - 10q - s = 5P - Q + R \\ 9) & -p + 4q - 2s = Q - S \\ 10) & -19p + 51q - 17s = 15Q + 4R - 4S + 5T \end{aligned}$$

aus 8) und 9) folgt

$$10) \quad 31p - 24q = 10P - 3Q + 2R + S$$

aus 9) und 10) aber

$$11) \quad -21p + 34q = +13Q + 8R + 9S + 10T$$

Nun hat man alsbald

$$\begin{aligned} 12) & 55p = 34P + 21Q + 26R + 25S + 24T \\ 13) & 55q = 21P + 34Q + 29R + 30S + 31T \\ 14) & 55r = 26P + 29Q + 49R + 45S + 41T \\ 15) & 55s = 25P + 30Q + 45R + 75S + 50T \\ 16) & 55t = 24P + 31Q + 41R + 50S + 59T \end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben augenscheinlich die bemerkenswerthen Eigenschaften der Normalgleichungen in Betreff der Factoren der $P, Q, R \dots$ behalten; durch Substitution der Werthe von $P, Q \dots$ erhält man sofort

$$55p = 6358,76, \text{ woraus sich ergibt } p = 115,61$$

$$55q = 9632,04, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad q = 176,95$$

$$55r = 19173,84, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad r = 348,62$$

$$55s = 54048,25, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad s = 982,70$$

$$55t = 42543,36, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad t = 773,52$$

Die übriggebliebenen Fehler, d. h. die $F-M$ ergeben sich

durch Substitution dieser Werthe für $p, q, \dots$ in die ursprünglichen Gleichungen. Man hat

$F_1 - M_1 = + 0,09$	also $(F_1 - M_1)^2 = 0,0081$
$F_2 - M_2 = + 1,22$	„ $(F_2 - M_2)^2 = 1,4884$
$F_3 - M_3 = - 0,09$	„ $(F_3 - M_3)^2 = 0,0081$
$F_4 - M_4 = - 1,11$	„ $(F_4 - M_4)^2 = 1,2321$
$F_5 - M_5 = + 0,67$	„ $(F_5 - M_5)^2 = 0,4489$
$F_6 - M_6 = + 1,83$	„ $(F_6 - M_6)^2 = 3,3489$
$F_7 - M_7 = + 1,83$	„ $(F_7 - M_7)^2 = 3,3489$
$F_8 - M_8 = + 0,45$	„ $(F_8 - M_8)^2 = 0,2025$
$F_9 - M_9 = - 2,28$	„ $(F_9 - M_9)^2 = 5,1984$

folglich $\Sigma (F - M)^2 = 15,2843$,
 kleiner als für jeden andern Werth der $p, q, r \dots$

22. Die vorstehende ganz gewöhnliche Rechnung lässt sich noch in mancher Hinsicht abkürzen. Zunächst erscheinen die grossen Zahlen störend: man vermeidet sie noch gründlicher als durch Einführung der Werthe $P, Q, R \dots$ durch Einführung von sogenannten Näherungswerthen, worunter man Zahlwerthe der Unbekannten versteht, welche nach ungefährrer Beurtheilung den gegebenen ursprünglichen Gleichungen schon ziemlich genau entsprechen. Z. B. aus der ersten Gleichung folgt nahezu $p = 116$; setzt man also $p = 116 + p_1$, wo p_1 eine noch zu bestimmende Correction bedeutet, so geht die erste der ursprünglichen Gleichungen über in $- 0,48 = + p_1$. Ebenso folgt aus der dritten der ursprünglichen Gleichungen $q = 177$ nahezu; setzt man wiederum $q = 177 + q_1$, so verwandelt sich die dritte Gleichung in $0,04 = q_1$ und geht jetzt die zweite über in $- 0,88 = - p_1 + q_1$. So wird man aus den zwei folgenden Gleichungen leicht erhalten $r = 350 + r_1$; ferner $s = 984 + s_1$, $t = 775 + t_1$. Unter Benutzung dieser Näherungswerthe mit angehängten Correctionen werden jetzt die ursprünglichen Gleichungen übergehen in

$- 0,48 = + p_1$			
$- 0,88 = - p_1 + q_1$			
$0,04 = + q_1$			
$0,12 = - p_1 + r_1$			
$- 2,00 = - q_1 + r_1$			
$- 1,75 = - r_1 + s_1$			
$- 2,01 = - s_1 + t_1$			
$- 1,88 = - q_1 + t_1$			
$+ 2,18 = - r_1 + t_1$			

24 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Aus ihnen erhält man gerade so, wie vorhin angegeben, die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} + 0,28 &= + 3 p_1 - q_1 - r_1 &= P_1 \\ + 3,04 &= - p_1 + 4 q_1 - r_1 &- t_1 = Q_1 \\ - 2,31 &= - p_1 - q_1 + 4 r_1 - s_1 - t_1 &= R_1 \\ + 0,26 &= &- r_1 + 2 s_1 - t_1 = S_1 \\ - 1,71 &= &- q_1 - r_1 - s_1 + 3 t_1 = T_1 \end{aligned}$$

Da nun wieder wie oben

$$55 p_1 = 34 P_1 + 21 Q_1 + 26 R_1 + 25 S_1 + 24 T_1$$

u. s. w.

so erhält man auch

$$55 p_1 = -21,24, \text{ also } p_1 = -0,39, \text{ und } p = 116 - 0,39 = 115,61$$

$$55 q_1 = -2,96, \text{ „ } q_1 = -0,05, \text{ „ } q = 177 - 0,05 = 176,95$$

$$55 r_1 = -76,16, \text{ „ } r_1 = -1,38, \text{ „ } r = 350 - 1,38 = 348,62$$

$$55 s_1 = -71,75, \text{ „ } s_1 = -1,30, \text{ „ } s = 984 - 1,30 = 982,70$$

$$55 t_1 = -81,64, \text{ „ } t_1 = -1,48, \text{ „ } t = 775 - 1,48 = 773,52$$

in Uebereinstimmung mit den direct gefundenen Resultaten.

23. Aus Vorstehendem erhellt, dass schliesslich durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren die Unbekannten ermittelt werden. So lange die Anzahl der Unbekannten klein ist, 2 bis 3 vielleicht, so giebt es wohl keinen Weg, der trotz der häufig mühsamen Rechnung schneller zum Ziele führte. Wird aber die Menge der Unbekannten, wie das nicht selten vorkommt, grösser, so dürften die folgenden Methoden den Vorzug verdienen.

Die Correctionen $p_1, q_1, r_1 \dots$ der Näherungswerthe, welche in No. 22 in die Rechnung eingeführt wurden, und welche dort in den Normalgleichungen als neue Unbekannte auftreten, sind voraussichtlich schon kleine Werthe, wenn, wie auch sonst rathsam, die Bestimmung der Näherungswerthe mit Umsicht vorgenommen wird. Man würde indessen einen Fehler begehen, wenn man z. B. die erste Gleichung

$$0,28 = 3 p_1 - q_1 - r_1$$

dahin abändern wollte, dass man unter Vernachlässigung der q_1 und r_1 sie also schriebe

$$0,28 = 3 p_1, \text{ woraus folgte}$$

$$0,09 = p_1.$$

Jedoch könnte man immerhin diesen Werth 0,09 als Näherungswerth für die Correction p_1 gelten lassen, und jetzt $p_1 = 0,09 + p_2$ setzend, diesen Ausdruck $0,09 + p_2$ überall statt p_1 in

die Gleichungen einführen. Die Gleichungen würden jetzt lauten (vergl. No. 22):

$$\begin{aligned} + 0,01 &= 3p_2 - q_1 - r_1 \\ + 3,13 &= -p_2 + 4q_1 - r_1 - t_1 \\ - 2,22 &= -p_2 - q_1 + 4r_1 - s_1 - t_1 \\ + 0,26 &= -r_1 + 2s_1 - t_1 \\ - 1,71 &= -q_1 - r_1 - s_1 + 3t_1 \end{aligned}$$

Was man aber jetzt bewirkt hat, ist, dass die Summe der Constanten links vom Gleichheitszeichen von 7,60 auf 7,33 heruntergegangen ist. Dies würde in noch stärkerem Grade der Fall gewesen sein, wenn man die Gleichung vorzugsweise so behandelt hätte, in welcher die Constante am grössten ist, also die zweite. Setzt man nämlich statt ihrer kurzweg

$$+ 3,13 = 4q_1$$

$$\text{also } 0,78 = q_1 \text{ näherungsweise,}$$

$$\text{und jetzt } q_2 + 0,78 = \text{dem wirklichen } q_1,$$

so gehen die eben erhaltenen Gleichungen über in

$$\begin{aligned} + 0,79 &= 3p_2 - q_2 - r_1 \\ + 0,01 &= -p_2 + 4q_2 - r_1 - t_1 \\ - 1,44 &= -p_2 - q_2 + 4r_1 - s_1 - t_1 \\ + 0,26 &= -r_1 + 2s_1 - t_1 \\ - 0,93 &= -q_2 - r_1 - s_1 + 3t_1 \end{aligned}$$

und die absolute Summe der Constanten beträgt nur noch 3,43. Nun ist klar, wenn man so fortfährt, die noch vorhandenen r_1, s_1, t_1 durch neue Näherungswerthe verbunden mit r_2, s_2, t_2 zu ersetzen, ferner auch statt der $p_2, q_2, r_2 \dots$ andere Näherungswerthe und Correctionen derselben einzuführen, wodurch man endlich zu Unbekannten p_n, q_m u. s. w. gelangt, und dabei immer die Gleichung zunächst berücksichtigt, in welcher, abgesehen vom Vorzeichen, der constante Theil am grössten ist, dass dann gleichzeitig die Constanten links so herabgehen werden, dass man die letzten Correctionen p_n, q_m u. s. w. in den Gleichungen, ohne grössere Fehler als höchstens eine Einheit der letzten Decimale zu begehen, der Null gleichsetzen kann. Augenscheinlich erhielte man dann aber die eigentlichen unbekannten Grössen oder die

$$p_1 = \text{der Summe aller neuen Näherungswerthe} = \Sigma p_n$$

$$q_1 = \text{„ „ „ „ „} = \Sigma q_n$$

u. s. f.

Die allerdings noch immer etwas langwierige aber sehr bequeme Rechnung ersieht man leicht aus folgender Zusammen-

26 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

stellung, bei welcher der Uebersichtlichkeit halber alle Accente weggelassen sind, die über den einzelnen Spalten stehenden Ausdrücke $q + 76$ u. s. w. die Gleichungen $q_1 = q_2 + 0,76$ vertreten, und darunter statt der ganzen Gleichungen nur die Constanten aufgeführt sind, weil ihre fortwährend sich verringernde Summe allein noch zu berücksichtigen bleibt. Unter fernerer Weglassung der Decimalkommata hat man

						$q + 76$	$r - 39$	$t - 45$	$q - 21$
$+ 3p - q - r - 0,28 = 0$						$- 104$	$- 65$	$- 65$	$- 44$
$- p + 4q - r - t - 3,04 = 0$						0	$+ 39$	$+ 84$	0
$- p - q + 4r - s - t + 2,31 = 0$						$+ 155$	$- 1$	$+ 44$	$+ 65$
$- r + 2s - t - 0,26 = 0$						$- 26$	$+ 13$	$+ 58$	$+ 58$
$- q - r - s + 3t + 1,71 = 0$						$+ 95$	$+ 134$	$- 1$	$+ 20$
$r - 16$	$s - 37$	$t - 24$	$r - 15$	$q - 14$	$s - 20$	$t - 17$	$r - 13$	$s - 15$	$q - 7$
$- 28$	$- 28$	$- 28$	$- 13$	$+ 1$	$+ 1$	$+ 1$	$+ 14$	$+ 14$	$+ 21$
$+ 16$	$+ 16$	$+ 40$	$+ 55$	$- 1$	$- 1$	$+ 16$	$+ 29$	$+ 29$	$+ 1$
$+ 1$	$+ 38$	$+ 62$	$+ 2$	$+ 16$	$+ 36$	$+ 53$	$+ 1$	$+ 16$	$+ 23$
$+ 74$	0	$+ 24$	$+ 39$	$+ 39$	$- 1$	$+ 16$	$+ 29$	$- 1$	$- 1$
$+ 36$	$+ 73$	$+ 1$	$+ 16$	$+ 30$	$+ 50$	$- 1$	$+ 12$	$+ 27$	$+ 34$
$t - 17$	$r - 8$	$p - 9$	$q - 7$	$s - 9$	$r - 7$	$t - 10$	$q - 4$	$p - 7$	$r - 5$
$+ 21$	$+ 29$	$+ 2$	$+ 9$	$+ 9$	$+ 16$	$+ 16$	$+ 20$	$- 1$	$+ 4$
$+ 12$	$+ 20$	$+ 29$	$+ 1$	$+ 1$	$+ 8$	$+ 18$	$+ 2$	$+ 9$	$+ 14$
$+ 34$	$+ 2$	$+ 11$	$+ 18$	$+ 27$	$- 1$	$+ 9$	$+ 13$	$+ 20$	0
$+ 10$	$+ 18$	$+ 18$	$+ 18$	0	$+ 7$	$+ 17$	$+ 17$	$+ 17$	$+ 22$
$+ 1$	$+ 9$	$+ 9$	$+ 16$	$+ 25$	$+ 32$	$+ 2$	$+ 6$	$+ 6$	$+ 11$
$s - 11$	$t - 7$	$q - 5$	$r - 5$	$p - 4$	$s - 6$	$t - 5$	$r - 4$	$q - 5$	$p - 3$
$+ 4$	$+ 4$	$+ 9$	$+ 14$	$+ 2$	$+ 2$	$+ 2$	$+ 6$	$+ 11$	$+ 2$
$+ 14$	$+ 21$	$+ 1$	$+ 6$	$+ 10$	$+ 10$	$+ 15$	$+ 19$	$- 1$	$+ 2$
$+ 11$	$+ 18$	$+ 23$	$+ 3$	$+ 7$	$+ 13$	$+ 18$	$+ 2$	$+ 7$	$+ 10$
0	$+ 7$	$+ 7$	$+ 12$	$+ 12$	0	$+ 5$	$+ 9$	$+ 9$	$+ 9$
$+ 22$	$+ 1$	$+ 6$	$+ 11$	$+ 11$	$+ 17$	$+ 2$	$+ 6$	$+ 11$	$+ 11$
$t - 3$	$r - 3$	$s - 7$	$t - 4$	$q - 3$	$r - 4$	$p - 4$	$s - 4$	$t - 4$	$q - 3$
$+ 2$	$+ 5$	$+ 5$	$+ 5$	$+ 8$	$+ 12$	0	0	0	$+ 3$
$+ 5$	$+ 8$	$+ 8$	$+ 12$	0	$+ 4$	$+ 8$	$+ 8$	$+ 12$	0
$+ 13$	$+ 1$	$+ 8$	$+ 12$	$+ 15$	$- 1$	$+ 3$	$+ 7$	$+ 11$	$+ 14$
$+ 12$	$+ 15$	$+ 1$	$+ 5$	$+ 5$	$+ 9$	$+ 9$	$+ 1$	$+ 5$	$+ 5$
$+ 2$	$+ 5$	$+ 12$	0	$+ 3$	$+ 7$	$+ 7$	$+ 11$	$- 1$	$+ 2$
$r - 3$	$s - 4$	$t - 3$	$r - 2$	$p - 2$	$q - 2$	$r - 1$	$s - 3$	$t - 2$	$r - 1$
$+ 6$	$+ 6$	$+ 6$	$+ 8$	$+ 2$	$+ 4$	$+ 5$	$+ 5$	$+ 5$	$+ 6$
$+ 3$	$+ 3$	$+ 6$	$+ 8$	$+ 10$	$+ 2$	$+ 3$	$+ 3$	$+ 5$	$+ 6$
$+ 2$	$+ 6$	$+ 9$	$+ 1$	$+ 3$	$+ 5$	$+ 1$	$+ 4$	$+ 6$	$+ 2$
$+ 8$	0	$+ 3$	$+ 5$	$+ 5$	$+ 5$	$+ 6$	0	$+ 2$	$+ 3$
$+ 5$	$+ 9$	0	$+ 2$	$+ 2$	$+ 4$	$+ 5$	$+ 8$	$+ 2$	$+ 3$

Da nun diesen 54 Interpolationen noch etwa ebenso viele folgen müssten, bis man die übrigbleibenden Constanten vernachlässigen könnte, so hat die ganze Rechnung höchstens an Bequemlichkeit gewonnen. Summiert man bis jetzt erhaltene p_2, p_3, p_4 u. s. w., so erhält man

$$p_1 = \Sigma (p) = - 0,29, \text{ während wirklich } p_1 = - 0,39$$

$$q_1 = \Sigma (q) = + 0,05, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad q_1 = - 0,05$$

$$r_1 = \Sigma (r) = - 1,26, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad r_1 = - 1,38$$

$$s_1 = \Sigma (s) = - 1,14, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad s_1 = - 1,30$$

$$t_1 = \Sigma (t) = - 1,35, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad t_1 = - 1,48$$

werden müssen laut No. 22.

24. Nun lässt sich aber mit Hülfe eines sehr energisch wirkenden „Kunstgriffs“ nicht allein die Menge der Interpolationen sehr erheblich verringern, sondern auch zugleich eine beständige Controle über die Richtigkeit der Rechnung gewinnen, Vorthelle, welche, verbunden mit der Bequemlichkeit der Rechnung, die Methode sehr empfehlenswerth machen dürften.

In den ursprünglichen Gleichungen bedeuteten 115,52 Fuss und 177,04 Fuss die gemessenen Höhen der Bahnhöfe zu B und H über dem Nullpunkt des Pegels der Nordsee zu A . Man hätte aber auch den Nullpunkt eines andern Pegels zum Ausgangspunkt des Nivellements machen können, von dem man annimmt, dass er n Fuss unter dem Pegel der Nordsee bei A liegt; die Grösse von n ist dabei ganz gleichgültig. Denkt man sich aber von jetzt an unter p, q, r, s, t die Höhen der Bahnhöfe über diesem zweiten Nullpunkt, so werden die ursprünglichen Gleichungen sich verwandeln in

$$115,52 = - n + p$$

$$60,12 = - p + q$$

$$177,04 = - n + q$$

$$234,12 = - p + r$$

$$171,00 = - q + r$$

$$632,25 = - r + s$$

$$- 211,01 = - s + t$$

$$596,12 = - q + t$$

$$427,18 = - r + t$$

indem aus allen Gleichungen, welche Niveau-Unterschiede der Bahnhöfe unter einander repräsentieren, der Werth n verschwindet.

Mit Hülfe der frühern Näherungswerthe in No. 22, nämlich

28 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

$p = 116 + p_1$, $q = 177 + q_1$, $r = 350 + r_1$, $s = 984 + s_1$,
 $t = 775 + t_1$ erhält man sofort die abgekürzten Gleichungen

$$\begin{array}{rcl}
 -0,48 & = & -n + p_1 \\
 -0,88 & = & -p_1 + q_1 \\
 0,04 & = & -n - q_1 \\
 0,12 & = & -p_1 + r_1 \\
 -2,00 & = & -q_1 + r_1 \\
 -1,75 & = & -r_1 + s_1 \\
 -2,01 & = & -s_1 + t_1 \\
 -1,88 & = & -q_1 + t_1 \\
 +2,18 & = & -r_1 + t_1
 \end{array}$$

Aus ihnen bilde man in bekannter Weise die Normalgleichungen und löse sie nach der in No. 23 gezeigten Methode, so wird man nach überraschend kurzer Arbeit am gewünschten Ziele sich befinden. Unter Weglassung aller Accente und der Decimalstriche hat man

						$q + 76$	$r - 39$	$t - 45$
$2n - p - q$					$-0,44 = 0$	-120	-120	-120
$-n + 3p - q - r$					$-0,28 = 0$	-104	-65	-65
$-n - p + 4q - r - t$					$-3,04 = 0$	0	$+39$	$+84$
$-p - q + 4r - s - t$					$+2,31 = 0$	$+155$	-1	$+44$
$-r + 0s - t$					$-0,26 = 0$	-26	$+13$	$+58$
$-q - r - s + 3t$					$+1,71 = 2$	$+95$	$+134$	-1

$n + 60$	$p + 42$	$s - 29$	$n + 21$	$q + 10$	$p + 10$	$n + 10$	$q + 5$	$p + 5$	$t - 4$
0	-42	-42	0	-10	-20	0	-5	-10	-10
-125	$+1$	$+1$	-20	-30	0	-10	-15	0	0
$+24$	-18	-18	-39	$+1$	-9	-19	$+1$	-4	0
$+44$	$+2$	$+31$	$+31$	$+21$	$+11$	$+11$	$+6$	$+1$	$+5$
$+58$	$+58$	0	0	0	0	0	0	0	$+4$
-1	-1	$+28$	$+28$	$+18$	$+18$	$+18$	$+13$	$+13$	$+1$

$n + 5$	$p + 2$	$q + 2$	$n + 2$	$s - 2$	$p + 1$	$q + 1$	$n + 1$
0	-2	-4	-0	0	-1	-2	0
-5	$+1$	-1	-3	-3	0	-1	-2
-5	-7	$+1$	-1	-1	-2	$+2$	$+1$
$+5$	$+3$	$+1$	$+1$	$+3$	$+2$	$+1$	$+1$
$+4$	$+4$	$+4$	$+4$	0	0	0	0
$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	0	0

Schon jetzt, nach 21 Interpolationen ergibt die Substitution nicht mehr ganze Einheiten der zweiten Decimlstelle, und ist deshalb mit Recht abzurechnen.

Man hat alsbald

$$\begin{aligned}
 \Sigma (n) &= + 60 + 21 + 10 + 5 + 2 + 1 = + 0,99 = n \\
 \Sigma (p) &= + 42 + 10 + 5 + 2 + 1 = + 0,60 = p_1 \\
 \Sigma (q) &= + 76 + 10 + 5 + 2 + 1 = + 0,94 = q_1 \\
 \Sigma (r) &= - 39 = - 0,39 = r_1 \\
 \Sigma (s) &= - 29 - 2 = - 0,31 = s_1 \\
 \Sigma (t) &= - 45 - 4 = - 0,49 = t_1
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 - n + p_1 &= - 0,39, \text{ mithin } p = 116 - 0,39 + n = 115,61 + n \\
 - n + q_1 &= - 0,05, \quad \text{,,} \quad q = 177 - 0,05 + n = 176,95 + n \\
 - n + r_1 &= - 1,38, \quad \text{,,} \quad r = 350 - 1,38 + n = 348,62 + n \\
 - n + s_1 &= - 1,30, \quad \text{,,} \quad s = 984 - 1,30 + n = 982,70 + n \\
 - n + t_1 &= - 1,48, \quad \text{,,} \quad t = 775 - 1,48 + n = 773,52 + n
 \end{aligned}$$

wo aber die p, q, r, s, t noch die neuen Bedeutungen, nämlich der Höhen der Bahnhöfe über dem veränderten Nullpunkt haben, welcher n Fuss unter dem frühern der Annahme gemäss liegen sollte. Giebt man also den p, q, r, s, t die alten Bedeutungen wieder, indem man überall n Fuss subtrahiert, so erhält man wie vorhin

$$\begin{aligned}
 p &= \text{Höhe des Bahnhofs in } B \text{ über dem Pegel in } A = 115,61 \text{ Fuss} \\
 q &= \text{,, ,, ,, ,, } H \text{ ,, ,, ,, ,, } = 176,95 \text{ ,,} \\
 r &= \text{,, ,, ,, ,, } L \text{ ,, ,, ,, ,, } = 348,62 \text{ ,,} \\
 s &= \text{,, ,, ,, ,, } G \text{ ,, ,, ,, ,, } = 982,70 \text{ ,,} \\
 t &= \text{,, ,, ,, ,, } W \text{ ,, ,, ,, ,, } = 773,52 \text{ ,,}
 \end{aligned}$$

also genau dieselben Werthe, welche vorhin (21) das directe Eliminationsverfahren ergab.

25. Es wird den Anfänger interessieren zu erfahren, dass die in No. 23 und 24 entwickelten Methoden von Gauss herrühren, welcher die Idee zu der zuerst mitgetheilten Methode einmal gelegentlich hinwarf, ohne sich länger dabei aufzuhalten. Später aufmerksam gemacht auf das Langwierige des Verfahrens, gab er zu, in praxi selbst sie noch nicht befolgt zu haben, vielmehr hätte er nur gedacht, dass man auf die Weise es sich bequem machen könne. Dann aber einen Augenblick sich besinnend, gab er unmittelbar darauf die in No. 24 dargestellte Verbesserung an, und nun die Entwicklung und Folgen dieses „Kunstgriffs“ mit raschem Blick überfliegend, erklärte er alsbald zuversichtlich, obgleich es den Anschein hätte, als ob man durch die Vermehrung der Unbekannten „vom Pferd auf den Esel“ käme, so würde man doch

30 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

finden, dass die jetzt möglich gewordene Sicherheit und Schnelligkeit des Verfahrens nichts mehr zu wünschen übrig lasse. Er legte übrigens auf diese unter Umständen (siehe die Ausgleichung der Horizontalwinkel in No. 28) doch höchst willkommene und dabei höchst geistreiche Idee so wenig Gewicht, dass er meinte, sie öffentlich mitzutheilen verlohne sich nicht der Mühe, „da Jeder, der mit solchen Rechnungen ernsthaft zu thun bekäme, sich selbst derartige Erleichterungen erfinden könne“. Doch fügte er scherzend hinzu, einigen Leuten würde das allerdings schwerer als andern, da selbst die Einführung von Näherungswerthen in die Rechnung, so nahe die Veranlassung dazu auch läge, besonders wenn „krause Brüche“ in den Gleichungen aufträten, schon Manchem als neu vorgekommen wäre. Es stammen diese Aeusserungen des grossen Mannes aus Vorträgen, welche er im Winter 1843 vor einem kleinen Kreise von Zuhörern hielt; da die Methode bisher nicht sehr bekannt geworden zu sein scheint (ungeachtet Gerling in seinem geschätzten Werk über die Ausgleichungs-Rechnungen sie gebührend hervorhebt und gerade ihre passende Anwendung auf Horizont-Abschlüsse betont, erwähnt die „United States Coast Survey“ in ihrem Report von 1854 in einer ausführlichen Darlegung der Gauss'schen Methoden dieser Idee mit keinem Wort, obschon die ersten Beispiele dort auch die Ausgleichung der Horizontalwinkel behandeln), so glaubte ich dem practischen Rechner durch diese ausführliche Mittheilung einen Dienst zu erzeigen. Es steht zu erwarten, dass die Herausgabe der nachgelassenen Schriften des „princeps mathematicorum“ manche Goldstufe zu Tage fördern wird.

26. Bei näherer Prüfung wird man leicht entdecken, worin der Grund der oben erwähnten Controle über die Richtigkeit der Rechnung zu suchen ist. Durch die Einführung der Grösse — n in die ursprünglichen Gleichungen (so gut, wie hier dem n eine reelle Bedeutung untergelegt ist, wird man es auch in andern Fällen können, vergl. spätere Aufgaben) wird jetzt nämlich bewirkt, dass bei den behuf Bildung der Normalgleichungen vorzunehmenden Multiplicationen der Gleichungen mit dem Factor derjenigen Unbekannten, in Bezug auf welche man differentiert, alle Glieder der Gleichungen ebenso häufig positiv als negativ genommen werden müssen, und als nothwendige Folge der alsdann vorzunehmenden Additionen der zusammengehörigen Gleichungen.

Aufgabe: Gesetz der Ausdehnung der Flüssigkeiten. 31

chungen, die Summe sowohl der Constanten als der Factoren der Unbekannten 0 wird. Es wird aber, wie ein Blick auf die Normalgleichungen in No. 24 in der That zeigt, nicht bloss die algebraische Summe der Normalgleichungen zu Null, sondern es bleibt dann auch nach jeder Interpolation die Summe der Constanten Null, und um sich also jeden Augenblick von der Richtigkeit der Rechnung überzeugt halten zu dürfen, bedarf es nur eines Blicks auf die Summe der letzten Ziffern rechts, resp. der niedrigsten Decimalziffern in den einzelnen kleinen Spalten.

Und weil endlich in der Interpolationsrechnung allen Unbekannten p, q, r, s, t die Correctionen des n zu Gute kommen, so folgt, dass gerade durch sie die Menge der Interpolationen, und zwar durchschnittlich im umgekehrten Verhältniss mit der Menge der Unbekannten, abnehmen muss.

27. Gesetz der Ausdehnung von Flüssigkeiten durch die Wärme.

Mit steigender Wärme nimmt bekanntlich das Volumen der meisten Körper, besonders der Flüssigkeiten, zu. Denkt man sich das Volumen eines Körpers bei 0° Temperatur $= 1$, so würde man es bei t° ausdrücken können durch $1 + pt$, vorausgesetzt dass die Zunahme des Volumens der Zunahme der Wärme proportional wäre und die Zahl p die Volumenvergrößerung für je einen Grad vorstellte. Indessen tritt dieser Fall nur bei wenigen Körpern und selbst dann auch nur ein, so lange gewisse Temperaturgrenzen, z. B. von 0° bis 20° , von 0° bis 50° oder bis 100° , nicht überschritten werden. Ist aber die Zunahme des Volumens auch nicht proportional der Zunahme der Wärme, so bleibt sie doch von ihr abhängig, und kann in solchem Fall der Ausdruck $1 + pt + qt^2$, oder selbst $1 + pt + qt^2 + rt^3$ ein der Wärme entsprechender Werth des Volumens sein.

Solche Constanten p, q, r zu ermitteln, ist Sache einer Rechnung, die sich auf die bei bestimmten Temperaturen beobachteten Volumina eines Körpers bezieht.

Nach Buff, Kopp und Zamminer, Lehrbuch der phys. und theoret. Chemie S. 199 hat Regnault für das Volumen des Quecksilbers folgende Werthe erhalten:

bei 50° 1,009013

„ 100° 1,018153

„ 150° 1,027419

„ 200° 1,036811

bei 250° 1,046329

„ 300° 1,055973

„ 350° 1,065743,

32 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

wobei zu bemerken ist, dass die Temperaturen mit dem Luftthermometer gemessen sind, und das Volumen des Quecksilbers bei $0^\circ = 1$ gesetzt ist. Es genügt nun für Quecksilber, wie man am Schluss aus der erhaltenen Formel sich überzeugen kann, die Volumveränderung von der zweiten Potenz der Temperaturgrade sich abhängig zu denken, also im Allgemeinen sein Volumen durch $1 + pt + qt^2$ auszudrücken. Bedenkt man nun, dass die in No. 17 aufgeführten $M_1, M_2 \dots$ hier die Werthe 1,009013, 1,018153 u. s. w. haben, ferner das frühere a hier t , b hier t^2 genannt ist, so erhellt sofort die Richtigkeit der Gleichungen:

$$1,009013 = 1 + 50 p + 2500 q$$

$$1,018153 = 1 + 100 p + 10000 q \text{ u. s. f.,}$$

welche alsbald auf die Form kommen:

$$0,009013 = 50 p + 2500 q$$

$$0,018153 = 100 p + 10000 q$$

$$0,027419 = 150 p + 22500 q$$

$$0,036811 = 200 p + 40000 q$$

$$0,046329 = 250 p + 62500 q$$

$$0,055973 = 300 p + 90000 q$$

$$0,065743 = 350 p + 122500 q.$$

Hat man aberursprüngliche Gleichungen von der Form

$$M_1 = a_1 p + b_1 q$$

$$M_2 = a_2 p + b_2 q \text{ u. s. f.,}$$

so werden die Normalgleichungen die allgemeine Form annehmen:

$$[aM] = [a^2]p + [ab]q$$

$$[bM] = [ab]p + [b^2]q.$$

Die Rechnung für diese Summen ordne man nun also:

$[aM]$	$[bM]$	$[a^2]$	$[ab]$	$[b^2]$
0,450650	22,532500	2500	125000	6250000
1,815300	181,530000	10000	1000000	100000000
4,112850	616,927500	22500	3375000	506250000
7,362200	1472,440000	40000	8000000	1600000000
11,582250	2895,562500	62500	15625000	3906250000
16,791900	5037,570000	90000	27000000	8100000000
23,010050	8053,517500	122500	42875000	15006250000
65,125200	18280,080000	350000	98000000	29225000000
$= [aM]$	$= [bM]$	$= [a^2]$	$= [ab]$	$= [b^2]$

Man hat jetzt die beiden Normalgleichungen:

$$65,1252 = 35\,0000\,p + 9800\,0000\,q$$

$$18280,0800 = 9800\,0000\,p + 292\,2500\,0000\,q$$

Setzt man, um die grossen Zahlen zu vermeiden, zunächst

$$10000\,p = p_1$$

$$100\,0000\,q = q_1,$$

so findet man leicht

$$p_1 = 1,7900\,950$$

$$q_1 = 0,0252\,235, \text{ also}$$

$$p = 0,0001\,7900\,950$$

$$q = 0,0000\,0002\,5223\,5.$$

Darnach lautet die Gleichung für das Volumen V des Quecksilbers bei einer gewissen Temperatur von t^0 , das Volumen bei $0^0 = 1$ gesetzt,

$$V = 1 + 0,0001\,7900\,950\,t + 0,0000\,0002\,5223\,5\,t^2$$

Die Constanten weichen etwas ab von den im oben genannten Werke S. 203 genannten, höchst wahrscheinlich, weil den dort aufgeführten andere ursprüngliche Data zu Grunde gelegen haben, indem die Beobachtungen nicht in der That bei jenen abgerundeten Temperaturzahlen angestellt sind. Dort ist $p = 0,0001\,7900\,7$, $q = 0,0000\,0002\,5231\,6$.

Dass die Entwicklung der Function beim Gliede mit t^2 aufhören darf, erklärt sich aus der Kleinheit des Factors von t^2 .

Nach vorstehender Formel werden die übrigbleibenden Fehler

$$F_1 - M_1 = 0,000000$$

$$F_2 - M_2 = 0,000000$$

$$F_3 - M_3 = 0,000063$$

$$F_4 - M_4 = 0,000000$$

und die übrigen alle wieder 0. Dieselben Fehler lässt die in dem genannten Werke angezeigte Formel zurück.

In Müller's Physik Bd. II, S. 499 ist nun auch direct gesagt, dass die oben genannten, aus Beobachtungen von Regnault stammenden Werthe für M_1 u. s. f. durch Rechnung aus der Formel erhalten sind. Die Formeln ergeben aber für $t = 150^0$, $V = 1,027482$ statt $1,027419$. Es muss also da jedenfalls ein Irrthum vorliegen. Man könnte z. B. glauben, dass die Differenz von einem Druckfehler herrühre, und überhaupt $1,027482$ lesen statt $1,027419$. Allein die Einführung dieses um $0,000063$ grössern Werthes verändert

34 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

$$\Sigma(aM) \text{ um } 0,009450$$

$$\Sigma(bM) \text{ um } 1,417500,$$

wodurch die Werthe für p und q sich stark verschieben. Man erhält

$$p = 0,0001\,7992\,13$$

$$q = 0,0000\,0002\,2063\,224.$$

28. Ausgleichung von Horizontalwinkeln.

Es sind gemessen eine Reihe Horizontalwinkel zwischen sieben Oertern, welche letztere der Einfachheit halber durch die Zahlen 1 bis 7 angedeutet werden mögen, da ihre wirkliche Bedeutung gleichgültig ist. Jeder Winkel ist ein Mittelwerth aus der beigeschriebenen Zahl von Beobachtungen; diese Zahlen werden später als die Gewichte der Messungen in die Gleichungen eingeführt.

Winkel zwischen	Gegebener Mittelwerth	aus .. Beobachtungen
1 und 2	101° 56' 42",125	20
1 „ 4	126° 43' 6",075	20
2 „ 3	18° 14' 14",600	10
2 „ 4	24° 46' 24",175	20
2 „ 5	27° 14' 17",528	9
2 „ 6	50° 22' 7",148	32
3 „ 4	6° 32' 6",775	10
3 „ 6	32° 7' 52",117	15
4 „ 5	2° 27' 52",950	10
4 „ 6	25° 35' 44",441	22
4 „ 7	45° 37' 42",375	20
5 „ 6	23° 7' 49",600	10
6 „ 7	20° 2' 0",250	22

Man wünscht nun diejenigen Werthe der Winkel 1 und 2, 1 und 3, 1 und 4, 1 und 5, 1 und 6, 1 und 7, welche am besten zu jenen Beobachtungen stimmen, um aus ihnen nach Bedarf auch andere Winkel, wie z. B. 2 und 3, 3 und 4 ... herleiten zu können. Die Rechnung würde demnach zunächst 6 Unbekannte umfassen. Sie stecken in den folgenden ursprünglichen Gleichungen, in welchen $p = \angle 1 \dots 2$, $q = \angle 1 \dots 3$, $r = \angle 1 \dots 4$ u. s. w. ist.

$$\begin{aligned}
101^{\circ}56'42'',125 &= +p \\
126^{\circ}43'6'',075 &= +r \\
18^{\circ}14'14'',600 &= -p + q \\
24^{\circ}46'24'',175 &= -p + r \\
27^{\circ}14'17'',528 &= -p + s \\
50^{\circ}22'7'',148 &= -p + t \\
6^{\circ}32'6'',775 &= -q + r \\
32^{\circ}7'52'',117 &= -q + t \\
2^{\circ}27'52'',950 &= -r + s \\
25^{\circ}35'44'',441 &= -r + t \\
45^{\circ}37'42'',375 &= -r + u \\
23^{\circ}7'49'',600 &= -s + t \\
20^{\circ}2'0'',250 &= -t + u.
\end{aligned}$$

Um die grossen Zahlen zu vermeiden, führe man vor aller weitem Arbeit Näherungswerthe ein, welche man als Mittelwerthe aus mehreren sich darbietenden Werthen auswählt. Man setze nämlich:

$$\begin{aligned}
p &= 101^{\circ}56'42'' + p_1 & s &= 129^{\circ}10'59'' + s_1 \\
q &= 120^{\circ}10'57'' + q_1 & t &= 152^{\circ}18'49'' + t_1 \\
r &= 126^{\circ}43'5'' + r_1 & u &= 172^{\circ}20'48'' + u_1.
\end{aligned}$$

Dadurch reducieren sich obige Gleichungen auf:

$$\begin{aligned}
0'',125 &= +p_1 \\
1'',075 &= +r_1 \\
-0'',400 &= -p_1 + q_1 \\
1'',175 &= -p_1 + r_1 \\
0'',528 &= -p_1 + s_1 \\
0'',148 &= -p_1 + t_1 \\
-1'',225 &= -q_1 + r_1 \\
0'',117 &= -q_1 + t_1 \\
-1'',050 &= -r_1 + s_1 \\
0'',441 &= -r_1 + t_1 \\
-0'',625 &= -r_1 + u_1 \\
-0'',400 &= -s_1 + t_1 \\
1'',250 &= -t_1 + u_1
\end{aligned}$$

Um nun auch sogleich Gebrauch zu machen von der wesentlichen Abkürzung der Berechnung von Gleichungen mit vielen Unbekannten, welche wir in No. 24 gezeigt haben, so geben wir die Richtung nach Ort 1 als Anfangsrichtung auf, und verlegen diese nach einem beliebigen Orte 0, welcher von dem Orte 1 um den $< 1.0 = n = \alpha + n_2$ entfernt liegt, indem α einen beliebigen

36 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

gen Näherungswerth von n bedeutet. Ferner seien jetzt p_2, q_2, r_2 u. s. w. Näherungswerthe der ganzen Winkel 0 und 2, 0 und 3 u. s. f., von der neuen Anfangsrichtung aus gemessen, also $p_2 = n_2 + p_1, q_2 = n_2 + q_1$ u. s. f.; alsdann gehen die eben erhaltenen reducirten Gleichungen über in

$$\begin{aligned} 0,125 &= -n_2 + p_2 \\ 1,075 &= -n_2 + r_2 \\ -0,400 &= -p_2 + q_2 \\ 1,175 &= -p_2 + r_2 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

unverändert wie vorhin, da das n_2 in allen folgenden Gleichungen ausfällt.

Bei der jetzt vorzunehmenden Bildung der Normalgleichungen bedenke man, dass nicht allein jede Gleichung mit dem Factor der Unbekannten, in Bezug auf welche man die Gleichung bildet, zu multiplicieren ist, sondern ausserdem noch mit der Zahl, welche das Gewicht der in ihr niedergelegten Messung bezeichnet. Um also die Normalgleichung in Bezug auf n zu bilden, hat man die erste Gleichung mit -1 und mit 20, d. h. mit -20 , die zweite ebenfalls mit -20 zu multiplicieren und dann die beiden erhaltenen Gleichungen zu addieren. Die Normalgleichung in Bezug auf p erhält man durch Multiplication der ersten Gleichung mit $+20$, der dritten mit -10 , der vierten mit -20 , der fünften mit -9 , der sechsten mit -32 , und nachfolgende Addition. Da die Arbeit wegen der meist runden Zahlen wenig umfänglich ist, so erscheint es unnöthig, sie schematisch darzustellen. Die Normalgleichungen und ihre Lösung sieht man in folgender Zusammenstellung, in welcher die Indices der Unbekannten weglassen sind, ebenso wie später die Decimalstriche, weshalb die Zahlenwerthe durch 1000 zu dividieren sind:

									$r + 451$
$+40n$	$-20p$		$-20r$			$+24,000 = 0$			$+14980$
$-20n$	$+91p$	$-10q$	$-20r$	$-9s$	$-32t$	$+26,488 = 0$			$+17468$
	$-10p$	$+35q$	$-10r$		$-15t$	$-6,495 = 0$			-11005
$-20n$	$-20p$	$-10q$	$+102r$	$-10s$	$-22t$	$-20u$	$-46,068 = 0$		-46
	$-9p$		$-10r$	$+29s$	$-10t$		$+1,748 = 0$		-2762
	$-32p$	$-15q$	$-22r$	$-10s$	$+101t$	$-22u$	$+15,307 = 0$		$+5385$
			$-20r$		$-22t$	$+42u$	$-15,000 = 0$		-24020

$u + 572$	$p - 192$	$n - 470$	$p - 103$	$q + 230$	$p + 25$	$t + 20$	$n - 40$
$+ 14980$	$+ 18820$	$+ 20$	$+ 2080$	$+ 2080$	$+ 1580$	$+ 1580$	$- 20$
$+ 17468$	$- 4$	$+ 9396$	$+ 23$	$- 2277$	$- 2$	$- 642$	$+ 158$
$- 11005$	$- 9085$	$- 9085$	$- 8055$	$- 5$	$- 255$	$- 555$	$- 555$
$- 11486$	$- 7646$	$+ 1754$	$+ 3814$	$+ 1514$	$+ 1014$	$+ 574$	$+ 1374$
$- 2762$	$- 1034$	$- 1034$	$- 107$	$- 107$	$- 332$	$- 532$	$- 532$
$- 7199$	$- 1055$	$- 1055$	$+ 2241$	$- 1209$	$- 2009$	$+ 11$	$+ 11$
$+ 4$	$+ 4$	$+ 4$	$+ 4$	$+ 4$	$+ 4$	$- 436$	$- 436$

$r - 13$	$q + 12$	$s + 14$	$n - 6$	$p - 3$	$u + 4$	$r + 1$	$n - 1$
$+ 240$	$+ 240$	$+ 240$	0	$+ 60$	$+ 60$	$+ 40$	0
$+ 418$	$+ 298$	$+ 172$	$+ 292$	$+ 19$	$+ 19$	$- 1$	$+ 19$
$- 425$	$- 5$	$- 5$	$- 5$	$+ 25$	$+ 25$	$+ 15$	$+ 15$
$+ 48$	$- 72$	$- 212$	$- 92$	$- 32$	$- 112$	$- 10$	$+ 10$
$- 402$	$- 402$	$+ 4$	$+ 4$	$+ 31$	$+ 31$	$+ 21$	$+ 21$
$+ 297$	$+ 117$	$- 23$	$- 23$	$+ 73$	$- 15$	$- 37$	$- 37$
$- 176$	$- 176$	$- 176$	$- 176$	$- 176$	$- 8$	$- 28$	$- 28$

Da eine neue Interpolation keine volle Einheit der dritten Decimale mehr geben würde, so ist die Rechnung jetzt schon abzuberechnen. Man erhält

$$n_2 = \Sigma(n) = -517, \quad p_2 = \Sigma(p) = -273, \quad q_2 = \Sigma(q) = +242$$

$$r_2 = \Sigma(r) = +439, \quad s_2 = \Sigma(s) = +14, \quad t_2 = \Sigma(t) = +20$$

$$u_2 = \Sigma(u) = +576,$$

und daraus unter Berücksichtigung, dass diese Zahlen Tausendtel Sekunden vorstellen, die Werthe

$$- n_2 + p_2 = +0'',244 = p_1$$

$$- n_2 + r_2 = +0'',956 = r_1$$

$$- p_2 + q_2 = +0'',515, \text{ also } - n_2 + q_2 = +0'',759 = q_1$$

$$- p_2 + s_2 = +0'',287, \quad ,, \quad - n_2 + s_2 = +0'',531 = s_1$$

$$- p_2 + t_2 = +0'',293, \quad ,, \quad - n_2 + t_2 = +0'',537 = t_1$$

$$- p_2 + u_2 = +0'',849, \quad ,, \quad - n_2 + u_2 = +1'',093 = u_1.$$

Daraus ergeben sich die Winkel, da $p = 101^\circ 56' 42'' + p$, u. s. w.:

$$p = 101^\circ 56' 42'',244 = < 1.2$$

$$q = 120^\circ 10' 57'',759 = < 1.3, \text{ also } < 2.3 = 18^\circ 14' 15'',515$$

$$r = 126^\circ 43' 5'',956 = < 1.4, \quad ,, \quad < 3.4 = 6^\circ 32' 8'',195$$

$$s = 129^\circ 10' 59'',531 = < 1.5, \quad ,, \quad < 4.5 = 2^\circ 27' 53'',575$$

$$t = 152^\circ 18' 49'',537 = < 1.6, \quad ,, \quad < 5.6 = 23^\circ 7' 50'',006$$

$$u = 172^\circ 20' 49'',093 = < 1.7, \quad ,, \quad < 6.7 = 20^\circ 1' 59'',556$$

38 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

als wahrscheinlichste Werthe derselben nach den vorliegenden Beobachtungen.

Durch Vergleichung der beobachteten Werthe mit den berechneten erhält man endlich die übriggebliebenen Fehler, und mit ihnen die Quadrate derselben, deren Minimum ein Kriterium für die Genauigkeit der Rechnung ist.

Beobachtete Winkel M	Berechnete Winkel F	Uebrigbl. Fehler $F - M$	Deren Quadrate $(F - M)^2$
101°56' 42",125	101°56' 42",244	+ 0",119	0,014161
126 43 6 ,075	126 43 5 ,956	— 0 ,119	0,014161
18 14 14 ,600	18 14 15 ,515	+ 0 ,915	0,837225
24 46 24 ,175	24 46 23 ,712	— 0 ,463	0,214369
27 14 17 ,528	27 14 17 ,287	— 0 ,241	0,058081
50 22 7 ,148	50 22 7 ,293	+ 0 ,145	0,021025
6 32 6 ,775	6 32 8 ,195	+ 1 ,420	2,016400
32 7 52 ,117	32 7 51 ,778	— 0 ,339	0,114921
2 27 52 ,950	2 27 53 ,575	+ 0 ,625	0,390625
25 35 44 ,441	25 35 43 ,581	— 0 ,860	0,739600
45 37 42 ,375	45 37 43 ,137	+ 0 ,762	0,580644
23 7 49 ,600	23 7 50 ,006	+ 0 ,406	0,164836
20 2 0 ,250	20 1 59 ,556	— 0 ,694	0,481636

Folglich $\Sigma (F - M)^2 = 5,647684$.

29. Die normale mittlere Jahrestemperatur des Breitenparallels als Function der Breite des Parallels.

Dass im Allgemeinen ein Zusammenhang existiert zwischen der mittlern Jahrestemperatur eines Ortes und seiner Breite ist ebenso gewiss, als dass dieser Zusammenhang für alle Orte desselben Breitenparallels ein ausserordentlich verschiedener ist, je nach den besonderen Eigenthümlichkeiten der Lage des Ortes, besonders hinsichtlich seiner Länge und in Bezug auf terrestrische und atmosphärische Umgebung. Letztere hat Dove allgemein auch durch die Länge des Ortes zu charakterisieren versucht und nun von zu 10° zu 10° die mittleren Jahrestemperaturen von Oertern auf demselben Breitenparallel zusammengestellt, die Summe derselben durch 36 dividiert und die erhaltene Zahl die normale

mittlere Jahrestemperatur des Breitenparallels genannt. Von 10 zu 10 Grad Breite finden sich seine Resultate in folgender Tabelle, die für nördliche Breite gilt, vereinigt:

Auf 0° Breite ist die normale mittlere Jahrestemperatur 21°,2 R.

„ 10°	„	„	„	„	„	21°,3 „
„ 20°	„	„	„	„	„	20°,2 „
„ 30°	„	„	„	„	„	16°,8 „
„ 40°	„	„	„	„	„	10°,9 „
„ 50°	„	„	„	„	„	4°,3 „
„ 60°	„	„	„	„	„	— 0°,8 „
„ 65°	„	„	„	„	„	— 4°,2 „
„ 70°	„	„	„	„	„	— 7°,1 „
„ 80°	„	„	„	„	„	— 11°,2 „
„ 90°	„	„	„	„	„	— 13°,2 „*)

Könnte man diese Angaben mit einigermaßen kleinem Fehler in eine Formel vereinigen, so hätte man leichte Mühe, um für jeden zwischenliegenden Parallel, d. h. für jede Ortsbreite die normale mittlere Jahrestemperatur sich zu berechnen. Der Unterschied der Temperatur des Parallels mit der mittleren Temperatur des einzelnen Ortes wäre dann die thermische Anomalie des Ortes.

Fasst man aber jene Angaben als Function der Breite auf, so genügt eine leichte Prüfung, dass die Form der Function, $p + q \cos \varphi$, ihnen nicht genügend entspricht, wenn man unter p die Temperatur am Pol, unter $q \cos \varphi$ die Menge Grade versteht, um welche die Temperatur auf der Breite φ gegen die am Pol zunimmt (daher die Wahl der Cosinus-Function in diesem und ähnlichen Fällen). Ein Näherungswerth von p wäre $-13°,2$ für $\varphi = 90$, wofür $\cos \varphi = 0$; ginge man mit diesem Werth für p nach 60° Breite, so würde sich aus der Gleichung $-0,8 = -13,2 + \frac{1}{2}q$, für q der Näherungswerth $+24,8$ ergeben. Dass diese Werthe p und q den übrigen Temperaturen nicht gut entsprechen, ergibt sich sofort. Wählt man dagegen für die zu bestimmende Function die allgemeine Form $p + q \cos \varphi + r \cos^2 \varphi$, so scheint diese bei vorläufiger Prüfung der Sache angemessener zu sein. Setzt man wieder $p = -13°,2$ in die Gleichung für $\varphi = 60°$, so

*) Vergl. Müller, kosmische Physik S. 300.

40 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

erhält man $-0,8 = -13,2 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}r$, also $49,6 = 2q + r$, ferner in die Gleichung für $\varphi = 30^\circ$, so erhält man

$$16,8 = -13,2 + q \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{4}r$$

$$30,0 = 0,86603 q + \frac{3}{4}r$$

$$120,0 = 3,46412 q + 3r.$$

Daraus ergibt sich $q = 11,36$, $r = 26,88$. Diese Näherungswerthe für p, q, r würden nun die Gleichung für $\varphi = 50^\circ$, oder

$$4,3 = -13,2 + 11,36 \cos 50 + 26,88 \cos^2 50$$

verwandeln in

$$4,3 = -13,2 + 7,302 + 11,110 = 4,212,$$

so dass die beiden Seiten der Gleichung leidlich übereinstimmen.

Man hätte demnach die Gleichungen zu lösen:

$$21,2 = p + q \cos 0^\circ + r \cos^2 0^\circ$$

$$21,3 = p + q \cos 10^\circ + r \cos^2 10^\circ$$

$$20,2 = p + q \cos 20^\circ + r \cos^2 20^\circ$$

$$16,8 = p + q \cos 30^\circ + r \cos^2 30^\circ$$

$$10,9 = p + q \cos 40^\circ + r \cos^2 40^\circ$$

$$4,3 = p + q \cos 50^\circ + r \cos^2 50^\circ$$

$$-0,8 = p + q \cos 60^\circ + r \cos^2 60^\circ$$

$$-4,2 = p + q \cos 65^\circ + r \cos^2 65^\circ$$

$$-7,1 = p + q \cos 70^\circ + r \cos^2 70^\circ$$

$$-11,2 = p + q \cos 80^\circ + r \cos^2 80^\circ$$

$$-13,2 = p + q \cos 90^\circ + r \cos^2 90^\circ.$$

Verglichen mit der früher aufgestellten allgemeinen Form der ursprünglichen Gleichungen

$$M = ap + bq + cr$$

ergibt sich, dass $M_1 = 21,2$, $M_2 = 21,3$ u. s. f. a überall $= 1$, $b_1 = \cos 0^\circ$, $b_2 = \cos 10^\circ$ u. s. f., $c_1 = \cos^2 0^\circ$, $c_2 = \cos^2 10^\circ$ u. s. f. ist. Die Einführung von Näherungswerthen für p, q, r verlohnt sich wegen der Kleinheit der Zahlen nicht.

Die Normalgleichungen würden demnach werden:

$$[M] = [p] + [\cos \varphi] q + [\cos^2 \varphi] r$$

$$[M \cdot \cos \varphi] = [\cos \varphi] p + [\cos^2 \varphi] q + [\cos^3 \varphi] r$$

$$[M \cdot \cos^2 \varphi] = [\cos^2 \varphi] p + [\cos^3 \varphi] q + [\cos^4 \varphi] r.$$

Die Berechnung der Factoren $[\cos \varphi]$, $[\cos^2 \varphi]$, $[\cos^3 \varphi]$, $[\cos^4 \varphi]$ geschieht durch folgende Rechnung:

Breite	$\log \cos$	Zahl	$\log \cos^2$	Zahl	$\log \cos^3$	Zahl	$\log \cos^4$	Zahl
$\varphi = 0^\circ$	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000
$\varphi = 10^\circ$	9,99335	0,98481	9,98670	0,96985	9,98005	0,95511	9,97340	0,94060
$\varphi = 20^\circ$	9,97299	0,93969	9,94598	0,88302	9,91897	0,82977	9,89196	0,77973
$\varphi = 30^\circ$	9,93753	0,86603	9,87506	0,75000	9,81259	0,64952	9,75012	0,56250
$\varphi = 40^\circ$	9,88425	0,76604	9,76850	0,58682	9,65275	0,44953	9,53700	0,34436
$\varphi = 50^\circ$	9,80807	0,64279	9,61614	0,41318	9,42421	0,26558	9,23228	0,17071
$\varphi = 60^\circ$	9,69897	0,50000	9,39794	0,25000	9,09691	0,12500	9,79588	0,06250
$\varphi = 65^\circ$	9,62595	0,42262	9,25190	0,17861	8,87785	0,07548	8,50379	0,03190
$\varphi = 70^\circ$	9,53405	0,34202	9,06810	0,11698	8,60215	0,04001	8,13620	0,01368
$\varphi = 80^\circ$	9,23967	0,17365	8,47934	0,03015	7,71901	0,00524	6,95868	0,00091
$\varphi = 90^\circ$	$-\infty$	0,00000	$-\infty$	0,00000	$-\infty$	0,00000	$-\infty$	0,00000
folglich $[\cos \varphi] = 6,63765$			$[\cos^2 \varphi] = 5,17861$		$[\cos^3 \varphi] = 4,39524$		$[\cos^4 \varphi] = 3,90689$	

Ferner hat man:

Breite	$M \cdot \cos \varphi$	$M \cdot \cos^2 \varphi$
$\varphi = 0^\circ$	21,2	21,2
$\varphi = 10^\circ$	20,9764	20,6578
$\varphi = 20^\circ$	18,9817	17,8370
$\varphi = 30^\circ$	14,5493	12,6000
$\varphi = 40^\circ$	8,3498	6,3963
$\varphi = 50^\circ$	2,7640	1,7767
$\varphi = 60^\circ$	$-0,4000$	$-0,2000$
$\varphi = 65^\circ$	$-1,7750$	$-0,7502$
$\varphi = 70^\circ$	$-2,4283$	$-0,8306$
$\varphi = 80^\circ$	$-1,9449$	$-0,3377$
$\varphi = 90^\circ$	0	
$[M \cdot \cos \varphi] = 80,2730$		$78,3493 = [M \cdot \cos^2 \varphi]$

Die Normalgleichungen werden nun:

$$58,200 = 11,000 p + 6,638 q + 5,179 r$$

$$80,273 = 6,638 p + 5,179 q + 4,395 r$$

$$78,349 = 5,179 p + 4,395 q + 3,907 r,$$

woraus sich ergeben $p = -13,913$, $q = +14,233$, $r = +22,545$.

42. B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Die gesuchte Gleichung ist also:

$$\text{Norm. mittl. Jahrestemp. d. Parallels} = -13,913^\circ + 14,233^\circ \cos \varphi + 22,545^\circ \cos^2 \varphi.$$

Die übrigbleibenden Fehler ersieht man aus folgender Zusammenstellung:

Breite	M	F	$F - M$	$(F - M)^2$
$\varphi = 0^\circ$	21,2	22,865	+ 1,665	2,772
$\varphi = 10^\circ$	21,3	21,971	+ 0,671	0,450
$\varphi = 20^\circ$	20,2	19,368	- 0,832	0,692
$\varphi = 30^\circ$	16,8	15,322	- 1,478	2,183
$\varphi = 40^\circ$	10,9	10,220	- 0,680	0,462
$\varphi = 50^\circ$	4,3	4,551	+ 0,251	0,063
$\varphi = 60^\circ$	- 0,8	- 1,160	- 0,360	0,130
$\varphi = 65^\circ$	- 4,2	- 3,872	+ 0,328	0,107
$\varphi = 70^\circ$	- 7,1	- 6,398	+ 0,702	0,493
$\varphi = 80^\circ$	- 11,2	- 10,762	+ 0,438	0,192
$\varphi = 90^\circ$	- 13,2	- 13,913	- 0,713	0,508

folglich $\Sigma(F - M)^2 = 8,052$.

An den wechselnden Vorzeichen der Fehler ist zu erkennen, in welchem Grade veränderlich die Abhängigkeit der normalen mittleren Jahrestemperatur des Parallels von der Breite ist. Hätte man der Function eine andere Form gegeben, z. B. $p + q \cos^2 \varphi$, oder $p + q \cos \varphi + r \cos^2 \varphi + s \cos^3 \varphi$, oder $p + q \cos^2 \varphi + r \cos^4 \varphi$ u. s. w., so würden die übrigbleibenden Fehler sich mit den neuen Werthen der Constanten p, q, r, s auch ändern. Die bezüglichen Rechnungen ergeben sich aus Vorstehendem zur Genüge.

30. Die Temperatur der Tiefe als Function der Tiefe. Die Zunahme der Temperatur als eine das tiefere Eindringen in das Erdinnere begleitende Thatsache ist seit Langem bekannt; in früheren Zeiten gab der Bergbau, in neueren Zeiten ausserdem das Bohren der artesischen Brunnen Gelegenheit zur Beobachtung. Natürlich schwanken die Ergebnisse der Beobachtungen nach der angewandten Sorgfalt, der chemischen Beschaffenheit der durchdrungenen Massen, ihren Verbindungen mit anderen Gegenden, Höhe über dem Meeresniveau, nach der mittleren Jahrestemperatur der Oberfläche u. s. w. Gewöhnlich drückt man die

Temperaturzunahme aus, indem man angiebt, dass man eine bestimmte Menge Meter hinabsteigen muss, damit das Thermometer um 1° Celsius steige. Ein Mittelwerth ist 30^m auf 1° C. Humboldt, Kosmos Bd. IV, S. 237, gibt 91 bis 99 Fuss an; die Angaben schwanken.

Sehr zuverlässige Beobachtungen haben Arago und Walferdin über diesen Gegenstand angestellt, bei Gelegenheit der Bohrung des artesischen Brunnens zu Grenelle, der durch das grosse Kreidelager von Paris bis zu einer Tiefe von 517^m unter das Niveau des Meeres hinabgeführt ist, mithin eine der grössten absoluten bekannten Tiefen in der festen Erdkruste erreicht. Sie berechneten aus den in verschiedenen Tiefen erhaltenen Temperaturen, um wieviel Meter man von Schicht zu Schicht hinabsteigen müsse, damit das Thermometer um 1° C. steige; im Mittel erhalten sie $32^m.5$ auf 1° C.; einzelne Werthe divergieren von 21^m zu 62^m .

Trotz dieser Schwankung lässt sich, indem man die Frage umkehrt und nach der Temperaturerhöhung für je um 1^m steigende Tiefe fragt, die Temperaturerhöhung als Function der Tiefe darstellen, und zwar erhält man eine Formel, welche sich den wirklich beobachteten Temperaturen in den gemessenen Tiefen sehr genau anschliesst. Man wird nur die Temperaturzunahme nicht im einfachen Verhältniss der Tiefe proportional setzen dürfen, der Function also nicht die Form

$Temp. \text{ d. Tiefe} = Temp. \text{ d. Oberfläche} + p s$,
sondern lieber gleich die Form

$Temp. \text{ d. Tiefe} = Temp. \text{ d. Oberfläche} + p s + q s^2$
geben müssen, indem man sich unter p den der Tiefe s , und unter q den dem Quadrat der Tiefe s proportionalen Antheil der Temperaturzunahme zu denken hat.

Die von Arago, Bd. VI, S. 310, deutsch von Hankel, am genannten Orte angestellten Beobachtungen, zu welchen wir noch einige in der Nähe von Paris erhaltene Data, die meistens sehr zuverlässig scheinen, hinzufügen, sind folgende:

Mittlere Jahrestemperatur von Paris	$10^{\circ},60$ Cels.
Die Temperatur der Keller der Sternwarte	$11^{\circ},71$ in 28^m Tiefe
„ „ des Springbrunnens v. St. Ouen	$12^{\circ},90$ in 66^m „
„ „ des Brunnens von Selligue	$16^{\circ},40$ in 173^m „
„ „ „ „ Grenelle	$20^{\circ},00$ in 248^m „
„ „ „ „ „	$22^{\circ},20$ in 298^m „

44 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Die Temperatur des Brunnens von Grenelle 23°,75 in 400^m Tiefe

„ „ „ „ „ „ 26°,43 in 505^m „

„ „ „ „ „ „ 27°,70 in 548^m „

Man erhält daraus die Gleichungen

$$11,71 = 10,6 + p \cdot 28 + q \cdot 28^2$$

$$12,90 = 10,6 + p \cdot 66 + q \cdot 66^2$$

$$16,40 = 10,6 + p \cdot 173 + q \cdot 173^2 \text{ u. s. f.}$$

oder, unter Beseitigung der Zahl 10°,6, die Gleichungen

$$1,11 = 28 p + 28^2 q$$

$$2,30 = 66 p + 66^2 q$$

$$5,80 = 173 p + 173^2 q$$

$$9,40 = 248 p + 248^2 q$$

$$11,60 = 298 p + 298^2 q$$

$$13,15 = 400 p + 400^2 q$$

$$15,83 = 505 p + 505^2 q$$

$$17,10 = 548 p + 548^2 q$$

Die Rechnung, beispielsweise ohne Logarithmen geführt, ergibt zur Bildung der ersten Normalgleichung die partiellen Gleichungen:

$$31,08 = 784 p + 21952 q$$

$$151,80 = 4356 p + 287496 q$$

$$1003,40 = 29929 p + 5177717 q$$

$$2331,20 = 61504 p + 15252992 q$$

$$3456,80 = 88804 p + 26463592 q$$

$$5260,00 = 160000 p + 64000000 q$$

$$7994,15 = 255025 p + 128787625 q$$

$$9370,80 = 300304 p + 164566592 q$$

$$\text{und } 29599,23 = 900706 p + 404557966 q \dots (I.)$$

als erste Normalgleichung. Die zweite ergibt sich aus der Addition der Gleichungen

$$870,24 = 21952 p + 6146564 q$$

$$10018,80 = 287496 p + 18974736 q$$

$$173588,20 = 5177717 p + 895745041 q$$

$$578137,60 = 15252992 p + 3782742016 q$$

$$1030126,40 = 26463592 p + 7886150416 q$$

$$2104000,00 = 64000000 p + 25600000000 q$$

$$4037045,75 = 128787625 p + 65037750625 q$$

$$5135198,40 = 164566592 p + 90182492416 q$$

$$13068985,39 = 404557966 p + 193410001814 q \dots (II.)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man

$$p = 0,0420960$$

$$q = - 0,000020558$$

Mithin hat man

$$\begin{aligned} \text{Temp. der Tiefe} &= \text{Mittl. Jahrestemp. der Oberfläche} \\ &+ 0,0420960 \cdot S \\ &- 0,000020558 \cdot S^2 \end{aligned}$$

Eine Vergleichung der beobachteten und berechneten Temperaturen in den genannten Tiefen beweist die ziemlich genaue Uebereinstimmung beider.

Tiefe	Beobachtete Temperatur	Berechnete Temperatur	$F - M.$	$(F - M)^2$
28 ^m	11°,71 Cels.	11°,76	0°,05	0,0025
66	12°,90	13°,29	0°,39	0,1521
173	16°,40	17°,26	0°,86	0,7396
248	20°,00	19°,78	— 0°,22	0,0484
298	22°,20	21°,32	— 0°,88	0,7744
400	23°,75	24°,15	0°,40	0,1600
505	26°,43	26°,61	0°,18	0,0324
548	27°,70	27°,49	— 0°,21	0,0441
			$\Sigma (F - M)^2 = 1,9535$	

Auch Temperaturen in andern Bohrlöchern folgen der genannten Formel, wie z. B. in Sheerness, wo die mittlere Bodentemperatur 10°,5 C. ist, und in 110^m Tiefe 15°,5 gefunden wurde; die Formel giebt 14°,88. Ferner in Tours, wo die mittlere Bodentemperatur 11°,5 C. ist, und in 140^m Tiefe 17°,5 gefunden wurde; die Formel ergiebt 17°,1. In dem berühmten Bohrloch von Neu-Salzwirk fand man in einer Tiefe von 301^m 21°,5 C., bei einer mittleren Bodentemperatur von 10°. Die Formel ergiebt 20°,81. — Freilich Temperaturen wie in dem Bohrloch von Neuffen in Würtemberg, wo man in dem basaltischen Gestein in 385^m Tiefe 38°,7 C. fand, folgen als Ausnahmen keiner Regel, sondern müssen nach ihren besonderen Umständen beurtheilt werden.

Dass die nicht convergente Form der Function eine Anwendung auf grosse Tiefen verbietet, leuchtet ohne Weiteres ein; da die Beobachtungen selbst sich nur auf, absolut genommen, geringe

46 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Tiefen erstrecken, so wird überall jeder Schluss auf grosse Tiefen, z. B. von 1 Meile und darüber, sehr gewagt sein. Das negative Vorzeichen des dritten Gliedes zeigt an, dass die Temperatur der Tiefe nicht ganz so rasch als die Tiefe selbst zunimmt.

Ueber eine andere Formel für die Temperaturzunahme mit der Tiefe vgl. E. E. Schmid Meteorologie, Leipzig 1860, §. 119.

31. Die Grösse des mittleren Meridiangrades als Function der Breite.

Geschichtliche Vorbemerkungen.

Die Erforschung der Grösse und der Gestalt unserer Erde hat schon das wissenschaftlich gebildete Alterthum beschäftigt. Unter der als unbestritten angenommenen Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde, deren Umfang man sich wie die Kreise in 360 Grade getheilt dachte, hat man sich schon mehrere hundert Jahre vor dem Anfang unserer Zeitrechnung bemüht, die absolute Grösse eines oder mehrerer Grade in nordsüdlicher Richtung zu bestimmen, um aus der Grösse eines Bruchtheils des Meridiankreises auf die Grösse des ganzen Meridians oder des Umfangs der Erdkugel zu schliessen. Da indessen die befolgten Methoden theils höchst bequemer Weise auf reine Speculationen und willkürliche Annahmen hinausliefen, oder wenn ihnen auch theilweise richtige Principien zum Grunde lagen, doch sehr mangelhaft ausgeführt wurden, und endlich die Maasse der Alten selbst uns nicht genau bekannt sind, so können wir die betreffenden Untersuchungen der alten Mathematiker nur als Versuche ansehen. So gab Aristoteles den Umfang der Erde an zu 400000 Stadien = etwa 9300 geographischen Meilen, Archimedes aber zu 300000 Stadien = etwa 6975 geographischen Meilen, beide, wie es scheint, nach ungefährrer Schätzung. Mit mehr Berechtigung schloss Eratosthenes (um 230 v. Chr.) aus dem Umstande, dass zur Zeit des Solstitiums die Sonne zu Syene keinen Schatten warf, also im Zenith des Ortes stand, während sie gleichzeitig nach den Angaben des Gnomon zu Alexandrien um den 50sten Theil des Kreisumfangs, also um $7\frac{1}{5}$ Grad vom Zenith von Alexandrien entfernt blieb, dass Syene und Alexandrien um den 50sten Theil des Erdumfangs von einander entfernt lägen, der Erdumfang mithin, wenn diese Strecke nach den Angaben der Reisenden in nordsüdlicher Richtung 5000 Stadien gleich gerechnet werde, die Grösse von 250000 Stadien haben müsse = etwa 5817 geographische

Meilen. Noch näher der Wahrheit kam 200 Jahre später Posidonius, der aus den verschiedenen Meridianhöhen des Sterns Canopus zu Rhodus und Alexandrien sich den Breitenunterschied der genannten Oerter zu $7\frac{1}{2}$ Grad $= \frac{1}{48}$ des Kreisumfangs ermittelte, natürlich ohne Rücksicht auf Strahlenbrechung und auch in sonst unzuverlässiger Weise, sodann die Entfernung der Städte über See nach Schifferschätzung zu 5000 Stadien und ihren Längenunterschied gleich Null annahm, und so den Erdumfang zu 240000 Stadien $=$ etwa 5580 geographischen Meilen bestimmte. In Toisen ausgedrückt, würde ein Meridiangrad nach Eratosthenes 66500 Toisen, nach Posidonius 63300 Toisen halten. Später scheint sich nur noch Ptolemäus mit dem theoretischen Theil der Frage beschäftigt zu haben; er machte die richtige Bemerkung, dass man nicht durchaus in der Richtung des Meridians messen müsse, sondern die gemessene Strecke auch einen Winkel mit demselben bilden dürfe, indem er durch seine Arbeiten über die Sehnentafeln wusste, dass man vermittelst des bekannten Winkels dann auch den Abstand in der Richtung des Meridians würde berechnen können.

Man kann nicht umhin anzuerkennen, dass der eine Theil der Untersuchung, die Ermittlung des Breitenunterschiedes auf astronomischem Wege, in einer richtigen, der Annahme der Kugelgestalt der Erde entsprechenden Weise, wenn auch mit unzulänglichen Hilfsmitteln ausgeführt wurde. Worin aber die Alten fehlten, und wodurch auch die späteren Messungen der Araber, ferner im sechzehnten Jahrhundert des Franzosen Fernel und später des Engländers Norwood unzuverlässig wurden, das war die Ermittlung der absoluten Entfernung auf der Erdoberfläche vermittelst unmittelbarer Messung durch Schritte, wie es die Mensores gemacht zu haben scheinen, oder durch die Umläufe des Rades eines in nordsüdlicher Richtung dahinfahrenden Wagens, wie man noch im Anfange des vorigen Jahrhunderts ziemlich häufig bei Wegmessungen verfuhr. Dass durch eine glückliche Compensation von Fehlern dann allerdings noch überraschend genaue Endresultate erhalten werden können, beweist gerade die Messung von Fernel, der die Grösse des Meridiangrades zwischen Paris und Amiens zu 57070 Toisen fand; Norwood freilich, welcher den Bogen zwischen London und York direct mit der Messkette maass, fand den dortigen Meridiangrad 57300, nach Anderen gar 57424 Toisen gross.

48 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Einen wesentlichen Fortschritt in der Methode der Messung machte erst der auch sonst rühmlichst bekannte Snellius, welcher um 1615 mittelst einer gut gemessenen Standlinie und darauf basirter Triangulierung die Strecke zwischen Alkmaar und Bergenopzoom maass und daraus den Meridiangrad zu 55074 Toisen bestimmte. Er entdeckte indessen selbst noch mehrere Fehler in seiner Arbeit, starb jedoch, bevor er die neue Rechnung vollendet hatte; erst 100 Jahr später ermittelte Muschenbroek aus Snellius Journal und nachdem er eine Reihe Winkel von Neuem gemessen, die Grösse des Meridiangrades zu 57033 Toisen, welches Resultat der Wahrheit ziemlich nahe kommt.

Nach dem Holländer Snellius sind es vorzugsweise Franzosen, welche bis in die neuere Zeit hinauf dem Problem der Gradmessung ausdauernde Aufmerksamkeit zugewandt haben, wenn auch die Ergebnisse ihrer Messung vor denen der Engländer, später noch der Deutschen und Russen gerade keinen Vorzug verdienen. Aber die Concentration der wissenschaftlichen Kräfte in der Akademie Frankreichs gab eine stets neue Anregung, und leitete von einer Verbesserung der Methoden zur andern, während gleichzeitig die Unterstützung von Seiten der Regierung, als auch deren Interesse erregt war, die materiellen Mittel gewährte, welche grössere Unternehmungen dieser Art erfordern. Hatte Snellius seine Dreiecke noch vielfach in einander geschoben und verwickelt, so fing man nachher an, sie möglichst neben einander zu legen, in der vorgeschriebenen Richtung fort, (man vergleiche die interessante Kartenskizze, welche Arago Bd. XIII, S. 256 von den französischen Dreiecken von Formentera bis Dünkirchen und weiter bis Greenwich giebt); statt wie Snellius gelegentlich Winkel durch Rechnung zu ermitteln, maass man jeden Winkel durch directe Ablesung und später noch durch oftmalige Repetition, als der Borda'sche Repetitionstheodolit zu den Messungen verwandt wurde (man vergl. Arago Bd. XIII, S. 202 u. ff.); man nahm ferner Rücksicht auf die verschiedenen Erhebungen der Dreieckspunkte und reducierte vor aller weiteren Rechnung erst die Messungsergebnisse auf den Horizont; man behandelte die grösseren Dreiecke von nun als sphärische in Gemässheit der noch immer als richtig angenommenen Kugelgestalt der Erde, während Snellius mit einem bei seinen durchgängig kleinen Dreiecken allerdings verschwindend kleinen Fehler alle als eben betrachtet hatte; bestimmte sodann die Grösse des zu messenden Bogens, indem man

einen Theil desselben nach dem andern aus den benachbarten Dreiecken ermittelte, statt wie Snellius den Bogen schliesslich aus einem einzigen Dreieck zu berechnen; endlich, nachdem in den angezeigten Richtungen der geodätische Theil der Messung verbessert war, corrigierte man auch den astronomischen Theil der Operationen nach den Hilfsmitteln und Grundsätzen, wie solche die sich von der Zeit her gerade so mächtig entwickelnde theoretische und praktische Astronomie nach und nach an die Hand gab.

Die Zahl der Gradmessungen mehrte sich mit der Verbesserung der Methoden und Instrumente. Zunächst verdienen genannt zu werden die für Newtons grosse Entdeckungen so bedeutsamen Messungen von Picard, der zwischen Paris und Amiens die Grösse des Meridiangrades zu 57060 Toisen fand; sie wurden fortgesetzt und erweitert durch Lahire, welcher zwischen Paris und Dünkirchen den Meridiangrad zu 56960, und durch Cassini den Jüngern, der auf dem Bogen zwischen Paris und Perpignan den Meridiangrad zu 57098 Toisen bestimmte. Da diesen wirklich ausgeführten Messungen zufolge die Grösse der Meridiangrade nach den Polen abzunehmen schien, während um dieselbe Zeit Newton und Huyghens aus der von ihnen aus allgemeinen Gründen hergeleiteten Abplattungstheorie eine Vergrösserung der Meridiangrade nach den Polen zu als nothwendig nachwiesen, so entspann sich über diese Meinungsdivergenz zunächst eine längere literarische Fehde, bis man auf den richtigen Gedanken kam, durch eine wiederholte Messung an zwei der Breite nach sehr verschiedenen Orten diese Frage auf empirischem Wege ein für allemal zu erledigen. So kamen zu Stande die wegen der Genauigkeit ihrer Resultate berühmt gewordene peruanische Gradmessung, welche Bouguer, Condamine und Godin vom Jahre 1735 an ausführten, und gleichzeitig die jetzt als incorrect bezeichnete lappländische Gradmessung unter Leitung von Maupertius, Clairaut und dem Schweden Celsius. Durch diese Messungen wurde jeglicher Zweifel über die in Frage gestellte Thatsache gehoben; da die Grösse des Meridiangrades unter dem Aequator von Bouguer zu 56733 Toisen, und unter 66° Breite von Maupertius zu 57437 Toisen bestimmt wurde, so war die wachsende Grösse der Grade auf zunehmender Breite constatirt.

Natürlich veränderte sich mit dieser Erkenntniss auch das ganze Object der Untersuchung. Den bisherigen Gradmessungen hatte mehr oder minder entschieden die Voraussetzung zu Grunde

50 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

gelegen, dass die Erde eine Kugel sei; mit der Veränderlichkeit der Grösse der Breitengrade fiel sofort diese Hypothese, und auch der Streit darüber, ob die Erde an den Polen zugespitzt sei, wie Cassini der Jüngere aus seiner Messung hatte folgern wollen — in unsern Tagen hat Herr Johannes von Gumpach mal wieder dasselbe behauptet — oder vielmehr an den Polen abgeplattet sei, wie Newton lehrte, war zu Gunsten der Annahme des letzteren entschieden. Da nun aber die Grösse der Abplattung sich ganz verschieden herausstellte, je nachdem man von der einen oder der andern Gradmessung ausging, so wurden eine ganze Reihe von Gradmessungen hauptsächlich zu dem Zweck unternommen, die wirkliche Grösse der Abplattung zweifellos zu ermitteln, und so die Frage nach der Grösse der Erde in eine Untersuchung über die Gestalt der Erde umgewandelt. Aber die Ergebnisse der zahlreichen jetzt begonnenen Gradmessungen — Lacaille am Cap der guten Hoffnung, Boscowich im Kirchenstaat und in Piemont, Mason und Dixon in Pennsylvanien, Liesganig in Oesterreich, alle in den Jahren 1750 bis 70, später noch 1790 Burrow in Ostindien — durchgängig nicht einmal mit der nöthigen Präcision und Ehrlichkeit ausgeführt, brachten so wenig Uebereinstimmung in den resultierenden Werth der Abplattung, als die mit den besten Hilfsmitteln und von den ausgezeichneten französischen Gelehrten Delambre, Méchain, Biot, Arago von 1793 bis 1808 ausgeführte zweite grosse französische Gradmessung — die bekanntlich zum Nebenzweck die Herstellung eines sogenannten Naturmaasses, des Meters, hatte — oder die englische Gradmessung von Mudge in den Jahren 1800 bis 1802, und die verbesserte schwedische, welche Svanberg in den Jahren 1801 bis 1803 leitete. Da die Grösse der Abplattung schliesslich aus Formeln hervorgeht, in denen die Grösse eines Breitengrades auf höherer Breite combinirt wird mit der Grösse eines Breitengrades auf niederer Breite, so fand man, je nachdem man diese oder jene Messung mit einander verband, auch verschiedene Werthe der Abplattung. Hatten somit schon die ersten genaueren Gradmessungen der Erde die Hypothese ihrer Kugelgestalt beseitigt, so musste man jetzt aus den nachfolgenden theilweise sehr genauen Gradmessungen den Schluss ziehen, dass auch ein genaues, durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid nicht mit der wirklichen Gestalt der Erde übereinstimme. Dennoch blieb, um mit den Worten von Laplace zu reden, ein Umdre-

hungs-Ellipsoid bei allen Ungleichheiten, welche die Gestalt der Erde bietet, die natürlichste und einfachste Hypothese. Deshalb vereinigten sich auch die französischen Mathematiker, welche mit der Bestimmung des Metermaasses beauftragt waren, in diesem Gedanken, entnahmen der peruanischen und der zweiten französischen Gradmessung von Delambre u. s. w. einen Werth der Abplattung zu $\frac{1}{354}$, folgerten aus derselben Messung in Frankreich ferner, dass der Meridianbogen vom Aequator bis zum Pol die Länge von 5130740 Toisen habe und nannten den zehnmillionsten Theil dieser Länge oder $0',513074$ einen Meter (vergl. Laplace Mechanik des Himmels Bd. II, S. 176), gleichbedeutend mit 443,296 par. Linien, deren die sechsfüssige Toise 864 hat, (alle Angaben für den Fall, dass die Toise 16,25 Grad Celsius und der Meter gleichzeitig 0 Grad Temperatur habe). Damit haben die grösseren französischen Arbeiten in dieser Untersuchung gewissermaassen ihren Abschluss gefunden; die stattgehabten Messungen des Meridiangrades, in Verbindung mit der von Jacob Cassini schon unternommenen Messung des Parallelgrades zwischen Brest und Strassburg sind später zu der topographischen Aufnahme Frankreichs benutzt, Arbeiten, welche bei den erst in diesem Jahrhundert durchgeführten deutschen Gradmessungen sofort in Aussicht genommen waren.

Um soviel später aber die deutschen Mathematiker sich mit diesen Untersuchungen praktisch zu beschäftigen anfangen, um so viel Vollendeteres haben sie auch darin geleistet. Es genügt, die Namen Gauss, Schuhmacher, Bessel, ferner Struve zu nennen, um überzeugt sein zu können, dass wenn auch die Ausdehnung der in Deutschland gemessenen Bögen eine vergleichsweise geringe ist, dennoch die äusserste Genauigkeit in Messung wie Rechnung erzielt wurde, und ein Gleiches von der noch nicht beendeten grossen russischen Messung, welche sich von Lappland bis zum schwarzen Meere ausdehnt, zu rühmen ist. Die Verbesserungen an Instrumenten (Heliotrop von Gauss z. B.) oder in Methoden (Bessel's Winkelmessung durch einfache Ablesung z. B.) als nicht hierher gehörig übergehend und die Resultate der Messungen einer späteren Zusammenstellung vorbehaltend, müssen wir als einen besondern Fortschritt in der Rechnung die Annahme des mittlern Rotations-Ellipsoids betonen, wodurch die grosse Frage über die allgemeine Gestalt und Grösse der Erde endgültig abgeschlossen ist.

Neuerdings hat Baeyer in einer Denkschrift zur Begründung einer mitteleuropäischen Gradmessung eine Untersuchung der Abweichungen der Krümmung der Erdoberfläche und deren Ursachen angeregt, so dass also nicht mehr die specielle Krümmung, sondern auch die Beschaffenheit der Erdschichten an diesen Stellen zur Untersuchung verstellt wird.

Die nähere Auseinandersetzung der Hypothese Bessels wird zu einer besondern Auslassung über diesen Gegenstand führen.

32. Aeltere, besonders Laplace's Rechnungen über das mittlere Rotations-Ellipsoid.

Die verschiedenen im Vorigen kurz angeführten Gradmessungen sind in mannigfaltigster Weise combinirt worden, um aus ihnen den Betrag der Abplattung, den sogenannten Abplattungs-Coefficienten zu ermitteln. Dabei machte man aber die Erfahrung, dass jede neue Combination einen andern Abplattungs-Coefficienten gab. Um nur beispielsweise einige zu nennen, so erhielt man

aus der französischen und peruanischen Messung $\frac{1}{334}$, auch $\frac{1}{304}$
 „ „ „ „ lappländischen „ $\frac{1}{145}$, auch $\frac{1}{178}$
 je nach den angewandten Formeln, ferner aus einzelnen Gradmessungen durch Combination der nördlichen und südlichen Bögen, z. B.

aus der französischen $\frac{1}{150}$
 aus der italienischen $\frac{1}{258}$
 aus der englischen $\frac{1}{55}$ u. s. w.,

Beweis genug, dass entweder die Messungen von ungleichmässiger Güte, oder die Erde von unregelmässiger Gestalt sein müsse, abgesehen noch von der ungleichen Strenge der Rechnungsmethoden.

Durch diese grossen Abweichungen wurde nun Laplace zu der Idee geführt, nicht bloss zwei, sondern mehrere Gradmessungen mit einander zu verbinden, um durch ihre Ausgleichung zu einem mittleren Werth der Abplattung, und zunächst auch der Grösse der Erdmeridiane zu gelangen.

Gerade den hierauf bezüglichen Rechnungen schickt Laplace eine schon oben (§. 7) als Vorläuferinn der Methode der kleinsten Quadrate bezeichnete Methode voraus, um sich über das Princip zu erklären, nach welchem die nothwendigen Ausgleichungen vorzunehmen seien. Von der Voraussetzung ausgehend, dass bei sämtlichen Messungen Fehler vorgekommen seien, unter-

sucht er zunächst, ob nach seiner Hypothese die Fehler innerhalb der möglichen Grenzen der Beobachtungsfehler bleiben; die Fehler sucht er in dem geodätischen Theil der Messung, im geraden Gegensatz zu Gauss, Schmidt, Bessel, welche sie in dem astronomischen Theil, d. h. in den gemessenen Zenithdistanzen der zur Bestimmung der Breite oder des Breitenunterschiedes benutzten Sterne suchen. Eine fernere Annahme ist, dass die Meridiane Ellipsen, die Erde ein Rotations-Ellipsoid ist, also die Meridiangrade vom Aequator nach den Polen hin im Verhältniss des Quadrats der Sinus der Breiten wachsen, der allgemeine Ausdruck für die Grösse eines Meridiangrades mithin $z + p \sin^2 \varphi$ sei, wo z die Grösse des Meridiangrades unter dem Aequator und $p \sin^2 \varphi$ die Vergrösserung desselben auf der Breite φ bedeute. Diese Formel $z + p \sin^2 \varphi$ wendet Laplace nun auf 7 Gradmessungen an, um durch sie zunächst zu ermitteln, ob die Annahme der elliptischen Gestalt der Erde überhaupt statthaft sei; dann aber auch, um diejenige Ellipse zu erkennen, „welche aus den gemessenen Graden mit der grössten Wahrscheinlichkeit folgt.“ Diese letztere Ellipse scheint ihm zufolge folgende Bedingungen erfüllen zu müssen: „erstens dass die Summe der Fehler, welche in den Messungen der ganzen gemessenen Bögen begangen worden, gleich Null ist; zweitens dass die Summe dieser, sämtlich positiv genommenen, Fehler ein Kleinstes ist. Führt man alsdann die ganzen Bogen in Rechnung, statt der Grade, welche man daraus hergeleitet hat, so giebt man jedem dieser Grade um desto mehr Einfluss auf die Ellipticität, welche hieraus für die Erde folgt, je beträchtlicher dieser Bogen ist, wie dies auch sein muss“. Nach unserer Ausdrucksweise giebt er also jeder der erhaltenen Gleichungen als Gewicht die Länge des in ihr enthaltenen Bogens in Graden ausgedrückt.

So richtig wie nun auch der Grundgedanke nach den damaligen Erfahrungen ist, so scheiterte die befriedigende Lösung der vorliegenden Frage doch theils an der Ungenauigkeit der zu Grunde gelegten Messungen, theils an der Mangelhaftigkeit der Methode, worüber schon oben gesprochen ist. Um indessen das reiche hier gebotene Material zur Uebung in der Methode der kleinsten Quadrate zu benutzen, vergleichen wir zunächst Laplace's Resultate mit den Resultaten, wie sie unsere verbesserte Methode liefert; wir werden im Verfolg dann unter Zugrundelegung der von Bessel geprüften Data der die scharfe Prüfung vertragen-

54 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

den Gradmessungen eine neue Rechnung vorführen, welche in Anlehnung an die Ideen von Laplace den Resultaten, welche Bessel gefunden hat, sehr nahe zu kommen gestattet.

33. Die sieben Gradmessungen, von welchen Laplace ausgeht, sind in Theilen des Maassstabes ausgedrückt, auf welchen man den von Dünkirchen bis Barcelona zur Bestimmung der Fundamenteinheit der Maasse und Gewichte gemessenen Bogen bezogen hat; er ist das Doppelte der Toise, deren sich Bouguer in Peru bediente, und wird mit R bezeichnet. Das Nothwendige über die Gradmessungen selbst findet sich in folgender Zusammenstellung.

Name der Gradmessung.	Grösse des gemessenen Bogens.	Mittlere Breite des Bogens.	Die durchschnittliche Grösse eines Grades.
1. Messung in Peru, von Bouguer	3°,4633	0°	25538 ^R ,85
2. „ am Cap d. g. Hoffn., v. Lacaille	1°,3572	37°,0093	25666 ^R ,65
3. „ in Pennsylvanien, v. Mason u. Dixon	1°,6435	43°,5556	25599 ^R ,60
4. „ „ Italien, v. Boscovich	2°,4034	47°,7963	25640 ^R ,55
5. „ „ Frankreich, v. Delambre etc.	10°,7487	51°,3327	25658 ^R ,29
6. „ „ Oesterreich, v. Liesganig	3°,2734	53°,0926	25683 ^R ,30
7. „ „ Lappland, v. Clairaut etc.	1°,0644	73°,7037	25832 ^R ,25

Die Breiten sind nach hunderttheiligen Graden angegeben, wie damals üblich; will man also Laplace's Angaben über die Grösse eines Meridiangrades nach der jetzt gebräuchlichen Einteilung umändern, so muss man die R mit 2 multiplicieren, und sodann durch 0,9 dividieren. Nimmt man sodann als allgemeinen Ausdruck für die Grösse eines beliebigen Meridiangrades die Form $M = z + p \sin^2 \varphi$ oder nach unserer bisherigen Schreibweise $M = p + q \sin^2 \varphi$, so erhält man sofort die Gleichungen

$$25538^R,85 = p$$

$$25666,65 = p + 0,30156 q, \text{ wo } 0,30156 = \sin^2 37^\circ,0093$$

$$25599,50 = p + 0,39946 q, \text{ wo } 0,39946 = \sin^2 43^\circ,5556$$

$$25640,55 = p + 0,46541 q \quad \text{u. s. f.}$$

$$25658,28 = p + 0,52093 q$$

$$25683,30 = p + 0,54850 q$$

$$25832,25 = p + 0,83887 q$$

56 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Aus den Rechnungen von Laplace, welche $p = 25538,85$ beibehalten, ergibt sich $q = 308^R,202$ und die Abplattung zu $\frac{1}{277}$ nach seiner Formel; dabei erhält er einen kleinsten Fehler von $48^R,6$, „auf welche Art man auch die vorhergehenden sieben Gradmessungen verbindet; und da dieser Fehler nur die Grenze derjenigen ist, welche zugelassen werden können, und deswegen selbst unendlich wenig wahrscheinlich ist, so müsste man, wenn man eine elliptische Figur annimmt, noch grössere Fehler als $48^R,60$ zulassen. Untersucht man aber mit Aufmerksamkeit die Messungen dieser Grade, so scheint es schwer anzunehmen, dass in jedem der drei in Pennsylvanien, am Vorgebirge der guten Hoffnung und in Lappland gemessenen Grade, auf welche die drei grössten Fehler fallen (nach L.), ein Irrthum von $48^R,60$ vorgefallen sei. Es scheint also aus den vorhergehenden Messungen zu folgen, dass die Aenderung der Erdmeridiangrade sich merklich vom Gesetz des Quadrats der Sinus der Breiten, welches die Hypothese elliptischer Meridiane giebt, entfernt“.

Die oben ermittelten Fehler lassen ebenfalls keinen Zweifel darüber zu, dass solche Irrthümer selbst bei jenen Messungen nicht vorgekommen sein werden. Dass die peruanische, französische und italienische Messung sich schon am engsten der Formel anschliessen, sei nur im Vorübergehen bemerkt.

Die Formel verändert sich nun bedeutend, wenn die einzelnen Differentialgleichungen mit ihren Gewichten, welche durch die in ihnen niedergelegten Gradmengen dargestellt werden, auftreten. Es erhält alsdann

die Gleichung	$25538,85 = p$	das Gewicht	3,4633
„	„	$25666,65 = p + 0,30156 q$	„ „ 1,3572
„	„	$25599,50 = p + 0,39946 q$	„ „ 1,6435
„	„	$25640,55 = p + 0,46541 q$	„ „ 2,4034
„	„	$25658,28 = p + 0,52093 q$	„ „ 10,7487
„	„	$25683,30 = p + 0,54850 q$	„ „ 3,2734
„	„	$25832,25 = p + 0,83887 q$	„ „ 1,0644

und die Forderung ist nun, die wahrscheinlichste Ellipse zu suchen, welche sich den genannten Gleichungen am besten anschliesst. Bezeichnen wir die gemessenen Grössen der verschiedenen Breiten entsprechenden Grade wieder durch M_1, M_2 u. s. f., ferner durch g_1, g_2 , u. s. f. die Gewichte dieser Messungen, so sind jetzt die Summen der Producte Mg , also $[Mg], [p \cdot g]$,

$[g \cdot \sin^2 \varphi]$, ferner $[g \cdot M \sin^2 \varphi]$ und $[g \cdot \sin^4 \varphi]$ zu bilden, welche die neuen Normalgleichungen ergeben:

$$[g M] = [g]p + [g \cdot \sin^2 \varphi]q$$

$$[g \cdot M \sin^2 \varphi] = [g \cdot \sin^2 \varphi]p + [g \cdot \sin^4 \varphi]q.$$

Da aus der vorigen Rechnung die Logarithmen der einzelnen Glieder der Summen $[M]$, $[\sin^2 \varphi]$, $[M \sin^2 \varphi]$, $[\sin^4 \varphi]$ bekannt vorausgesetzt werden dürfen, so bedarf es bloss noch der Addition der $\log g_1$, $\log g_2$ u. s. f. an den betreffenden Stellen, um zu den gewünschten Producten zu gelangen. Bei der geringen Anzahl von Gleichungen, wie im vorliegenden Fall, dürfte die Rechnung am bequemsten auf nachstehende Art ausgeführt werden:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
$\log g$	0,53949	0,13264	0,21577	0,38083	1,03136	0,51500	0,02710	
$\log M$	4,40720	4,40937	4,40823	4,40893	4,40923	4,40965	4,41216	
$\log \sin^2 \varphi$	—	9,47937	9,60147	9,66784	9,71678	9,73918	9,92369	
$\log M \sin^2 \varphi$	—	3,88874	4,00970	4,07676	4,12601	4,14883	4,33586	
$\log \sin^4 \varphi$	—	8,95875	9,20295	9,33567	9,43356	9,47835	9,84739	
$\log gM$	4,94669	4,54201	4,62400	4,78976	5,44059	4,92465	4,43926	
gM	88448,0	34834,6	42073,0	61625,7	275800,0	84071,7	27495,6	$614348,6 = [g \cdot M]$
$\log g \sin^2 \varphi$	—	9,61201	9,81724	0,04867	0,74814	0,25418	9,95079	
$g \sin^2 \varphi$	—	0,4093	0,6565	1,1186	5,5994	1,7955	0,8928	$10,4721 = [g \cdot \sin^2 \varphi]$
$\log gM \sin^2 \varphi$	—	4,02138	4,22547	4,45759	5,15737	4,66383	4,36296	
$gM \sin^2 \varphi$	—	10504,5	16806,2	28680,7	143671,0	46113,0	23065,2	$268840,6 = [gM \sin^2 \varphi]$
$\log g \sin^4 \varphi$	—	9,09139	9,41872	9,71650	0,46492	9,99335	9,87449	
$g \sin^4 \varphi$	—	0,1234	0,2623	0,5206	2,9169	0,9848	0,7490	$5,5570 = [g \sin^4 \varphi]$

Man erhält also die Normalgleichungen

$$614348,6 = 23,9539 p + 10,4721 q$$

$$268840,6 = 10,4721 p + 5,5570 q$$

und aus ihnen

$$p = 25523^R,8 = 56719^t,55 \text{ des } 90 \text{ theil. Grades,}$$

$$q = 291^R,641 = 648^t,09 \text{ „ „ „}$$

ferner aus $\psi = 0$, $\varphi = 60^\circ$ einen verbesserten Werth für die Ab-

$$\text{plattung} = \frac{1}{263}.$$

Laplace findet wieder zu $p = 25538^R,85$, welchen Werth er

58 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.
 unverändert beibehält, $q = 246^R,93$, und die Abplattung der Erde zu $\frac{1}{312}$. Dann fährt er wörtlich fort: „Dieser Ausdruck giebt $86^R,26$ für den Irrthum des lappländischen Grades, ein Irrthum, welcher viel zu gross ist, um zugelassen werden zu können. Dies bestätigt, was wir schon oben bemerkt haben, dass die Erde sich merklich von einer elliptischen Figur entfernt“.

Damit lässt Laplace nun die Idee einer Combination von mehreren Gradmessungen fallen und wendet sich jetzt allein zur Untersuchung der zweiten französischen Gradmessung von Méchain und Delambre, wohin wir ihm um so weniger folgen, als wir gerade diese Messung demnächst in der eigenen Berechnung des Meridiangrades wieder aufführen werden.

Die wirklich übrigbleibenden Fehler sind in der That noch gross genug, um Misstrauen entweder in die Hypothese oder in die Messungen zu rechtfertigen; sie betragen

bei der Messung von Peru	. . .	— $15^R,0$	= — $33',33$
„ „ „ am Cap d. g. H.	. . .	— $55,$	= — $122',22$
„ „ „ in Pennsylvanien	. . .	+ $40,8$	= + $90',67$
„ „ „ „ Italien	. . .	+ $18,6$	= + $43',55$
„ „ „ „ Frankreich	. . .	+ $17,4$	= + $38',67$
„ „ „ „ Oesterreich	. . .	+ $0,4$	= + $0',89$
„ „ „ „ Lappland	. . .	— $63,9$	= — $142'$

Die Messungen in Peru, Frankreich und Italien zeichnen sich wieder durch die kleineren Fehler aus, während die lappländische Messung allerdings mit einem grösser gewordenen Fehler auftritt. Dass die vielleicht am meisten angefochtene österreichische Messung hier mit dem kleinsten Fehler behaftet erscheint, muss aus der Unzuverlässigkeit der Mehrzahl der Messungen oder als Zufall erklärt werden.

Das Vorstehende wird genügen, um den Standpunkt zu bezeichnen, welchen die Wissenschaft in jener Zeit den allerdings widerstreitenden Messungen gegenüber einnahm. Den deutschen Mathematikern gebührt das Verdienst, durch strengere Methoden, grossartigere Auffassung und schärfere Analyse der Beobachtungen das Chaos der Meinungen und Ansichten aufgeklärt zu haben. Nach Berichten über ihre Arbeiten sucht man freilich in französischen Werken häufig vergebens; ohne Bessel's Namen zu nennen, überträgt Arago Bd. XIII, S. 258 die Bessel'schen Werthe der halben grossen und kleinen Erdaxe ausnahmsweise in

Meter, führt kurz dessen Abplattungswerth an und übergeht dessen ganze, für die französischen Rechnungen allerdings nicht schmeichelhafte Arbeit mit Stillschweigen, während von den geringfügigsten französischen Arbeiten bündigste Notiz genommen wird. So wird anderen Nationen ihr Recht geschmälert, während man für sich jede Kleinigkeit reclamirt.

34. Es sind unter unseren Landsleuten hauptsächlich die Namen Gauss, Schmidt, Bessel, welche hier vor Allen genannt werden müssen. Ihre Ansichten, welche im Folgenden so kurz und einfach als möglich zusammengefasst sind, waren nach allen Richtungen hin maassgebend; jedenfalls ist die Frage auch von ihnen tiefer behandelt, als von jedem anderen Zeitgenossen.

Zunächst wird zugegeben, dass die Erdoberfläche nicht genau mit der eines Rotations-Ellipsoids übereinstimmt, die Meridiane nicht mathematische Ellipsen sind. Dies folgt aus dem unregelmässigen Wachsen der Meridiangrade nach den Polen, und ferner noch aus verschiedenen, wenn auch nicht durchweg so zuverlässigen Messungen von Parallelkreisbögen (zwischen Brest und Strassburg, Bordeaux und Fiume), welche ebenfalls darthun, dass die Erdoberfläche reich an irregulären Senkungen und Hebungen ist. Jede neue Messung wird also neue Werthe der Meridiangrade und der Abplattung bringen, die Zahl der vorhandenen um eine andere vermehren, ohne die Mannigfaltigkeit der Wirklichkeit zu erschöpfen.

Die Untersuchung der Gestalt der Erdoberfläche und die Ermittlung der besonders interessanten Dimensionen des Erdkörpers muss deshalb so geführt werden, dass man aus den zuverlässigen der vorliegenden Messungen ein ideales elliptisches Sphäroid berechnet, welches sich in möglichst genauer Uebereinstimmung mit diesen wirklich ausgeführten Messungen befindet. Seine Form könnte man sich etwa dadurch versinnlichen, dass man sich den Continent von lauter Kanälen durchzogen dächte, welche mit dem Meere in Verbindung ständen und nun die Oberfläche dieser in's Gleichgewicht gekommenen Wassermasse bestimmte. Die Ausgleichung der Beobachtungen muss nach den Gesetzen der Methode der kleinsten Quadrate, d. h. so geschehen, dass die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler ein Kleinstes werde.

Diese Fehler aber, welche zwischen beobachteten und nach unserer Methode berechneten Grössen der Meridiangrade sich er-

geben, sind nach der neueren Ansicht weniger, als bisher angenommen, auf Rechnung des geodätischen Theils der Messung zu setzen, sondern rühren höchst wahrscheinlich vorwiegend von den astronomischen Bestimmungen der Breiten und der Breitenunterschiede oder Amplituden her. Mit vollem Recht nahm man Anstoss an Fehlern von 50 und mehr Toisen, welche bei den Messungen den bisherigen Rechnungen zufolge gemacht zu sein schienen; die Sorgfalt, mit welcher die Messung der ersten Basis und einer zweiten Controle-Basis ausgeführt werden, und das vollendete System der Winkelmessung lassen solche grosse Fehler verdächtig und unwahrscheinlich erscheinen. Um aber nur erst eine Idee von der Wirkung dieser Verlegung der Fehlerquelle zu bekommen, bedenke man nur, wie die Amplitude eines Bogens, dividirt in die auf der Erdoberfläche gemessenen Toisen, die Grösse des Meridiangrades ergibt, und nun ein Fehler in der Amplitude die Resultate in höchst wirksamer Weise verändert. Es sei z. B. ein Bogen von $1 \text{ Grad} = 57000 \text{ Toisen}$ gemessen, so sind $3600 \text{ Sekunden} = 57000 \text{ Toisen}$, also 1 Sekunde repräsentiert eine Strecke von beinahe 16 Toisen; mit anderen Worten, ein Fehler von 1 Sekunde in der Amplitude würde die Grösse des Grades um 16 Toisen verändern, Fehler von 50 Toisen, wie oben erhalten, einem Amplitudenfehler von 3 Sekunden entsprechen. Es bleibt natürlich die Frage zu erörtern, ob solche Fehler von einigen Sekunden Statt finden können.

35. Ob man Breiten oder Breitenunterschiede auf astronomischem Wege sucht, in jedem Fall sind dazu Messungen von Zenithdistanzen erforderlich; vom gleichen Stern im Meridian verschiedener Oerter genommen, geben sie den Breitenunterschied der Oerter; oder aber sie geben, verbunden mit der Declination des Sterns, bekanntlich die Breite des Beobachtungsortes selber. Diese Zenithdistanzen werden nur richtig ausfallen können, wenn man das richtige Zenith des Beobachtungsortes bestimmen kann. Die Richtung nach dem Zenith denkt man sich als die Richtung der Schwere, also des Bleiloths, des Pendels, um 90 Grade abstehend von der Oberfläche des künstlichen Horizonts. Man mag nun Zenithdistanzen messen mit Hülfe des am Theodolithen angebrachten Bleiloths oder eines Niveaus oder mit Hülfe eines künstlichen Horizonts: abgesehen von allen übrigen Fehlerquellen werden die Messungen um soviel fehlerhaft ausfallen, als die Rich-

tung des Loths von der wirklichen Verticallinie abweicht. Dass aber in der That die Richtung des Loths nicht immer genau mit der eigentlichen Normale auf die Oberfläche des Erdellipsoids zusammenfalle, darüber liegen Beobachtungen vor von Bouguer in der Nähe der Cordilleren, welcher dort Abweichungen des Loths bis zum Betrage von 7 bis 8 Sekunden fand, ferner von Maskelyne am Shehallien in Schottland, der gar 12 Sekunden örtliche Ablenkung des Pendels gemessen hat (vergl. Müller, kosm. Phys. S. 190). Dies sind frappante Fälle, in der Nähe grosser Gebirgsabhänge; aber Schmidt ist auch der Ansicht, „dass uns nichts zu der Annahme berechtigt, dass in ebenen Gegenden das Pendel gar keiner Abweichung von der Verticallinie unterworfen sei; im Gegentheil könne in vielen Gegenden diese Ablenkung bedeutender ausfallen, als in sehr bergigten Gegenden, und wir dürften wohl annehmen, dass an allen Orten der Erde eine Abweichung stattfindet, veranlasst durch Verschiedenheiten in der Constitution der festen Erdrinde, so dass es gar nicht zu verwundern sei, wenn jede Combination von zwei Gradmessungen eine andere Abplattung gebe, gesetzt auch, dieselben seien frei von allen sonstigen Beobachtungsfehlern. Würde z. B. das Pendel am südlichen Endpunkt eines Meridianbogens nach Norden, am nördlichen Endpunkt nach Süden abgelenkt, so würde der aus dem Unterschiede der Polhöhen sich ergebende Winkel grösser sein, als die eigentliche Amplitude des Bogens, und umgekehrt“. (Vergl. Schmidt, math. Geogr. Bd. I, S. 182.)

Wie schon vorhin bemerkt, gewinnen durch diese Verlegung der Fehlerquelle aus dem geodätischen Theil in den astronomischen die Messungen selber an Wahrscheinlichkeit, insofern als jetzt statt der grossen Zahlen nur noch kleine Winkelunterschiede von einigen Sekunden als übrigbleibende Fehler erscheinen, welche als Fehler schon bei Horizontalwinkeln vorkommen und bei Verticalwinkeln geradezu unvermeidlich erscheinen. Man kann diese Fehler nun ansehen entweder als Amplitudenfehler, indem durch gleichzeitig beobachtete Zenithdistanzen desselben Sterns die Amplitude des zwischen den Beobachtungsstationen liegenden Bogens mit einem Male ermittelt wird, oder als Fehler in den Polhöhen, indem man davon ausgeht, dass erst durch Subtraction der am nördlichen und südlichen Ende eines Meridianbogens aus den Observationen abgeleiteten Polhöhen der Stationen die Amplitude des zwischenliegenden Bogens ermittelt wird.

62 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

36. Von der ersten Ansicht ausgehend, hat schon Walbeck in einer in Abo 1819 erschienenen „Dissertatio de forma et magnitudine telluris ex dimensis arcubus meridiani definiendis“ die Abplattung und die Grösse eines Meridiangrades so zu bestimmen gesucht, dass die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den gemessenen und berechneten Amplituden ein Minimum sei. So fand er die Grösse eines Meridiangrades $= 57009,758$ Toisen und die Abplattung $= \frac{1}{302,78}$.

Da Walbeck in seine Rechnung aber nur die Endpunkte der ganzen von ihm in die Rechnung aufgenommenen Gradmessungen aufgenommen und sich in der Entwicklung seiner Gleichungen auf die erste Potenz der Abplattung beschränkt hatte, so nahm, durch Gauss speciell aufgefordert, Schmidt die Rechnung wieder auf, benutzte Walbeck's Resultate als genäherte Werthe, berücksichtigte die Zwischenstationen ebenfalls, deren Polhöhen als möglichst genau bestimmt angenommen werden durften, zog das Quadrat der Abplattung in Betracht, vermehrte die der Rechnung unterworfenen Gradmessungen noch um die von Gauss geleitete Hannoversche und machte nun die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten Polhöhen zu einem Minimum. Dann ergab sich die Abplattung $= \frac{1}{298,319}$ und der 360ste Theil des Erdmeridians zu 57008,662 Toisen.

Zuletzt hat nun der grosse Königsberger Astronom es unternommen (vergl. astron. Nachrichten, No. 333), „die Axen des Erdsphäroids so zu bestimmen, dass die vorhandenen Gradmessungen dadurch so gut als möglich dargestellt werden. Indem man, fährt er weiter fort, die Abweichungen der Oberfläche von der Oberfläche dieses Sphäroids als gesetzlos betrachtet, vereinigt sich ihr Einfluss auf die Polhöhen mit den Beobachtungsfehlern derselben, und man muss, der Methode der kleinsten Quadrate zufolge, dasjenige Sphäroid als das gesuchte betrachten, welches die gemessenen Entfernungen der Parallelen mit Polhöhen in Uebereinstimmung bringt, deren Unterschiede von den beobachteten den Bedingungen dieser Methode entsprechen“. Es wurde aber Bessel dadurch hauptsächlich zu seiner Arbeit veranlasst, weil seit der Rechnung von Schmidt noch drei neue Gradmessun-

gen ausgeführt waren (die russische, die dänische und die preussische), und weil Schmidt mehrere Angaben angewandt hatte, welche Bessel unrichtig zu sein schienen. Bessel's Resultate finden sich in der mehrgenannten Nummer der astronomischen Nachrichten mit der ganzen ausführlich mitgetheilten Rechnung; später hat er letztere noch einer Revision unterwerfen müssen, weil Mathieu Largeteau, Daussy und Puissant einen Fehler in der Entfernung der Parallelen von Montjouy und Mola, dessen Grösse sie zwischen $66',62$ und $69',89$ angaben, gefunden hatten, und deshalb einige auf die französische Gradmessung bezügliche Gleichungen modificiert werden mussten. Jetzt fand Bessel die Grösse des mittleren Meridiangrades $= 57013',109$ mit einem mittleren Fehler von $\pm 2',8403$ und die Abplattung $= \frac{1}{299}$; die Fehler in den Polhöhen schwanken zwischen den Grenzen $0'',065$ an einer ostindischen Station und $6'',447$ an einer französischen Station; der mittlere Fehler beträgt $\pm 2'',640$. Vergl. hierüber sowie über die übrigen Dimensionen des Erdkörpers astr. Nachr. No. 438.

Ein Hauptverdienst der gründlichen Arbeit Bessels besteht in der strengen Untersuchung und Prüfung der einzelnen Data und Angaben in den Gradmessungen, welche er seinen Rechnungen schliesslich zu Grunde legte, und wodurch er zu manchen Aenderungen sowohl der geodätischen als besonders auch der astronomischen Bestimmungen geführt wurde; und dass aus diesem Grunde und wegen der strengen Methode, nach welcher die letzte Ausgleichungs-Rechnung geführt wurde, seine Resultate so lange die endgültig richtigen sein werden, bis neue Gradmessungen wieder neue Momente zur Beurtheilung der wirklichen Gestalt des Erdsphäroids liefern, bedarf kaum der Erwähnung.

Beiläufig sei hier erwähnt, dass Mädler in der fünften — neuesten — Ausgabe seiner populären Astronomie (Berlin 1861) folgende neue Gradmessungen aufzählt;

- 1) die südliche Fortsetzung der russischen Messung bis Ismail;
- 2) die nördliche Fortsetzung durch Finnland und Norwegen bis Fuglenäs (russisch-norwegische Messung);

Eine Uebersichtskarte der bis 1858 ausgef. trig. u. astron. Arbeiten findet sich in Petermann's geograph. Mittheil. Jahrg. 1858. pag. 250.

64 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

3) die Messung von Everest in Nordindien als Fortsetzung der Lambton'schen.

Mädler pag. 23. Noch Weiteres vergl. in Baeyer's Denkschrift über Gradmessungen 1861.

37. Eine nicht uninteressante Nebenfrage scheint darüber noch nicht weiter untersucht zu sein, nämlich die Ermittlung der Grössen der Meridiangrade und der Abplattung auf Grund der älteren Hypothese, welche, wie oben gezeigt, schon von Laplace verfolgt, aber bald aufgegeben ist, und zwar mit Zugrundelegung der Bessel'schen Data. Es ist freilich vorhin der Zusammenhang zwischen dem Fehler von 1" in der Amplitude und etwa 16 Toisen Messungsfehler auf der Erdoberfläche kurz angedeutet, aber theils geht diese Rechnung von einer bestimmten Voraussetzung aus, welche nur auf einer gewissen Breite gültig ist, theils dürfte es an sich interessant sein zu sehen, wie sich überall die Fehler, welche nach der ältern Methode resultieren, zu den Fehlern, welche Bessel fand, verhalten. Da die bezügliche Rechnung, welche im Folgenden dargelegt werden soll, zugleich ganz elementar gehalten ist, so mag sie dem Anfänger zugleich als nützliche Uebung in langwierigern numerischen Rechnungen dienen.

Zunächst scheint es an der Zeit zu sein, die Bessel'schen Data aufzuführen, welche ihm zufolge die einzelnen Gradmessungen ergaben; vergl. astron. Nachr. No. 333 u. 438.

Name der Messung.	Station.	Polhöhe.	Amplitude.	Entfer- nung der Parallelen.
1. Die peruanische Messung. Mittelwerthe der Reductionen von Delambre u. v. Zach	Tarqui Cotchesqui	— 3° 4' 32",068 + 0 2 31 ,387	3° 7' 3",455	176 875 ^{T,5}
2. Die erste ostindi- sche Messung mit Be- rücksichtigung von Kater's Prüfung der Lambton'schen Rech- nung.	Trivandeporum Paudree	11° 44' 52",590 13 19 49 ,018	1° 34' 56",428	89 813 ^{T,01}

Name der M e s s u n g.	Station.	Polhöhe.	Amplitude.	Entfernung der Parallelen.
3. Die zweite ostindische Messung, nachdem Bessel „für nöthig gehalten, die mit dem Zenithsector zur Bestimmung der Polhöhen gemachten Beobachtungen einer neuen Rechnung zu unterwerfen“.	Punnae	8° 9' 31",132		
	Putchapolliam	10 59 42 ,276	2° 50' 11",144	160 944 ^T ,20
	Dodagoontáh	12 59 52 ,165	4 50 21 ,033	274 694 ,30
	Namthabad	15 5 53 ,562	6 56 22 ,430	393 828 ,09
	Daumeragidda	18 3 16 ,245	9 53 45 ,113	561 690 ,06
	Takal K'hora	21 5 51 ,532	12 56 20 ,400	734 570 ,43
	Kullianpoor	24 7 11 ,860	15 57 40 ,728	906 171 ,67
4. Die französische Messung nach den Verbesserungen und Auslassungen von Delambre und den eigenen Correctionen wegen des oben genannten Fehlers in dem Abstände der Parallelen von Montjoux und Mola.	Formentera	38° 39' 56",11		
	Montjoux	41 21 44 ,96	2° 41' 48",85	153 673 ^T ,61
	Barcelona	41 22 47 ,90	2 42 51 ,79	154 616 ,74
	Carcassonne	43 12 54 ,30	4 32 58 ,19	259 172 ,61
	Evaux	46 10 42 ,54	7 30 46 ,43	428 019 ,31
	Panthéon	48 50 49 ,37	10 10 53 ,26	580 312 ,41
5. Die englische Messung, indem die von Mudge gemachten Reductionen seiner Beobachtungen durch B. neu combinirt wurden.	Dunnose	50° 37' 7",633		
	Greenwich	51 28 39 ,000	0° 51' 31",367	49 059 ^T ,89
	Blenheim	51 50 27 ,632	1 13 19 ,999	69 829 ,19
	Arburyhill	52 13 28 ,031	1 36 20 ,398	91 696 ,39
	Clifton	53 27 31 ,130	2 50 23 ,497	162 075 ,93
6. Die hannoversche Messung. Aus Gauss' „Breitenunterschied etc.“ S. 71 entnommen.	Göttingen	51° 31' 47",85		
	Altona	53 32 45 ,27	2° 0' 57",42	115 163 ^T ,725
7. Die dänische Messung. Nach Mittheilungen von Schumacher.	Lauenburg	53° 22' 17",046		
	Lyssabel	54 54 10 ,352	1° 31' 53",306	87 436 ^T ,538
8. Die preussische Messung. Von B. selbst ausgeführt und beschrieben.	Trunz	54° 13' 11",466		
	Königsberg	54 42 50 ,500	0° 29' 39",034	28 211 ^T ,629
	Memel	55 43 40 ,446	1 30 28 ,980	86 176 ,975

Name der Messung.	Station.	Polhöhe.	Amplitude.	Entfernung der Parallelen.
9. Die russische Messung nach den Mittheilungen von General von Tenner und Struve.	Belin	52° 2' 40",864		
	Nemesch	54 39 4 ,519	2° 36' 23",655	148 811 ⁷ ,418
	Jacobstadt	56 30 4 ,562	4 27 23 ,698	254 543 ,454
	Bristen	56 34 51 ,550	4 32 10 ,686	259 110 ,085
	Dorpat	58 22 47 ,280	6 20 6 ,416	361 824 ,461
	Hochland	60 5 9 ,771	8 2 28 ,907	459 363 ,008
10. Die schwedische Messung. Nach den Angaben von Svanberg.	Malörn	65° 31' 30",265		
	Pahtawara	67 8 49 ,830	1° 37' 19",565	92 777 ⁷ ,981

38. Diese Gradmessungen sollen nun nach folgender Theorie verglichen werden.

Innerhalb jeder einzelnen Gradmessung werden die Messungen von einer Station zur andern als selbstständige, für sich bestehende Messungen angesehen. Während also Bessels Werthe der Amplituden von der südlichsten Station ab zur nördlichsten steigen, enthalten die neuen Amplituden nur die Breitenunterschiede je zweier nächst benachbarter Stationen und dazu die betreffenden Entfernungen der Parallelen. Aus dem Breitenunterschiede in Graden und der Entfernung der Parallelen in Toisen ergiebt sich, wie gross der Messung zufolge ein Grad auf der dazwischenliegenden Mittelbreite in Wirklichkeit ist. Man erhält auf diese Weise 28 Werthe der einzelnen Meridiangrade von 1° 31' 0",340 Mittelbreite bis herauf zu 66° 20' 10",048 der schwedischen Messung. Jeder der Werthe dieser Meridiangrade wird mit der Zahl als Gewicht in Rechnung geführt, welche den Breitenunterschied bezeichnet, aus welcher die Grösse des vollen Grades gefunden ist.

Die verschiedenen Werthe dieser Meridiangrade werden nun sämmtlich dem Ausdruck $p - q \cos 2\varphi$ gleichgesetzt und die Ausgleichung der Methode der kleinsten Quadrate gemäss ausgeführt. Da für $\varphi = 45^\circ$ der Ausdruck übergeht in den Werth p , so bedeutet p die Grösse des Meridiangrades, dessen mittlere Polhöhe $= 45^\circ$ ist, und $q \cos 2\varphi$ den für $\varphi < 45^\circ$ subtractiven, für $\varphi > 45^\circ$

additiven Werth in Toisen, um welche sich ein Meridiangrad auf der mittleren Breite von φ Graden von dem Meridiangrade auf 45° mittlerer Breite unterscheidet. Da nach Bessel die Grösse des Meridiangrades, dessen mittlere Polhöhe $= \varphi$ ist, durch den Ausdruck

$57013',109 - 286',337 \cos 2\varphi + 0',611 \cos 4\varphi + 0',001 \cos 6\varphi$ gefunden wird, so ist wegen der Bequemlichkeit der Vergleichung und der Möglichkeit der Erweiterung auf das dritte und vierte Glied die Form der Function $p - q \cos 2\varphi$ der früher angewandten $p + q \sin^2 \varphi$ vorgezogen, wo p die Grösse des Meridiangrades auf 0° Breite vorstellte.

Um die Rechnung von vornherein nicht mehr als nöthig weitläufig zu machen, bleibe die Function auf die beiden ersten Glieder beschränkt; man hat dann 28 Gleichungen von der Form

$$M = p - q \cos 2\varphi,$$

welche die Gewichte $g_1, g_2, g_3 \dots g_{28}$ haben, auszugleichen. Sie führen auf die beiden Normalgleichungen

$$[M.g] = p.[g] - q.[g.\cos 2\varphi] \text{ und}$$

$$[M.g.\cos 2\varphi] = p.[g.\cos 2\varphi] - q.[g.\cos^2 2\varphi],$$

aus welchen Gleichungen p und q gefunden werden können.

Die bezügliche Rechnung, welche hier ausführlich mitgetheilt wird, weil es in dieser Schrift nicht vorzugsweise auf die Resultate ankommt, sondern auch und vielmehr gezeigt werden soll, wie man auf schickliche Weise zu ihnen gelangt, lässt sich, wie unten gezeigt, ausführen. Dabei sind verschiedene Controlen, welche sich jeder praktische Rechner im Verlauf der Rechnung nicht entgehen lassen wird, z. B. über die Richtigkeit der neuen Amplituden u. s. w., um die Uebersicht nicht zu erschweren, weggelassen. Ferner sind keine Näherungswerthe, für die Grösse des mittleren Meridiangrades so wenig als für q , eingeführt, weil man damit den Vorthail einbüßen würde, die neuen „Entfernungen der Parallelen“, welche offenbar nichts anderes als die Werthe $g.M$ sind, direct zu benutzen; vergl. Spalte 4 und 7, welche multipliciert wieder Spalte 6 ergeben. Dass die Breitenunterschiede als Gewichte einzuführen waren, ergiebt sich am schlagendsten als nothwendig aus dem Werth für M in Spalte 7 bei Barcelona, da naturgemäss eine Amplitude von $1'2'',94$ nur dazu dienen kann, die Grösse eines ganzen Grades pro parte festzustellen; von Montjouy aber mit Ueberschlagung von Barcelona auf Carcassonne weiterzugehen, war ebenfalls unzulässig, weil damit die sichere Polhöhe von

68 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

1. Name der Gradmessung.	2. Station.	3. Breite.	4. Breiten-Unter- schied, g .
1. Peruanische . . .	Tarqui	— 3° 4' 32'',068	
	Cotchesqui	+ 0° 2' 31'',387	3° 7' 3'',455
2. Erste ostindische .	Trivandeporum	11° 44' 52'',590	
	Paudree	13 19 49 ,018	1° 34' 56'',428
3. Zweite ostindische	Punnae	8° 9' 31'',132	
	Putchapolliam	10 59 42 ,276	2° 50' 11'',144
	Dodagoontáh	12 59 52 ,165	2 0 9 ,889
	Namthabad	15 5 53 ,562	2 6 1 ,397
	Daumeragidda	18 3 16 ,245	2 57 22 ,683
	Takal K'hera	21 5 51 ,532	3 2 35 ,287
	Kallianpoor	24 7 11 ,860	3 1 20 ,328
4. Französische . . .	Formentera	38° 39' 56'',11	
	Montjouy	41 21 44 ,96	2° 41' 48'',85
	Barcelona	41 22 47 ,90	0 1 2 ,94
	Carcassonne	43 12 54 ,30	1 50 6 ,40
	Evaux	46 10 42 ,54	2 57 48 ,24
	Panthéon	48 50 49 ,37	2 40 6 ,83
	Dünkirchen	51 2 8 ,85	2 11 19 ,48
5. Englische	Dunnose	50° 37' 7'',633	
	Greenwich	51 28 39 ,000	0° 51' 31'',367
	Blenheim	51 50 27 ,632	0 21 48 ,632
	Arburyhill	52 13 28 ,031	0 23 0 ,399
	Clifton	53 27 31 ,130	1 14 3 ,099
6. Hannoversche . . .	Göttingen	51° 31' 47'',85	
	Altona	53 32 45 ,27	2° 0' 57'',42
7. Dänische	Lauenburg	53° 22' 17'',046	
	Lyssabel	54 54 10 ,352	1° 31' 53'',306
8. Preussische	Trunz	54° 13' 11'',466	
	Königsberg	54 42 50 ,500	0° 29' 39'',034
	Memel	55 43 40 ,446	1 0 49 ,946
9. Russische	Belin	52° 2' 40'',864	
	Nemesch	54 39 4 ,519	2° 36' 23'',655
	Jacobstadt	56 30 4 ,562	1 51 0 ,043
	Bristen	56 34 51 ,550	0 4 46 ,988
	Dorpat	58 22 47 ,280	1 47 55 ,730
	Hochland	60 5 9 ,771	1 42 22 ,491
10. Schwedische . . .	Malörn	65° 31' 30'',265	
	Pahtawara	67 8 49 ,830	1° 37' 19'',565

5. Mittelbreite φ .	6. Entfernung der Paralle- len, $g \cdot M$	7. Grösse eines Meri- diangrades auf der Mittelbreite φ , M .	8. Breitenunterschied in Decimaltheilen des Grades, g .	9. $\log g$
$1^{\circ} 31' 0'', 340$	176 875,5	56 734,026	$3^{\circ}, 117\ 626$	0,493 824
$12^{\circ} 32' 20'', 804$	89 813,01	56 759,576	$1^{\circ}, 582\ 341$	0,199 300
$9^{\circ} 34' 36'', 704$	160 944,20	56 741,842	$2^{\circ}, 836\ 429$	0,452 772
$11\ 59\ 47,221$	113 750,10	56 797,042	$2,002\ 747$	0,301 626
$14\ 2\ 52,864$	119 133,79	56 719,896	$2,100\ 388$	0,322 300
$16\ 34\ 34,904$	167 861,97	56 781,086	$2,956\ 301$	0,470 749
$19\ 34\ 33,889$	172 880,37	56 809,952	$3,043\ 135$	0,483 321
$22\ 36\ 31,696$	171 601,24	56 778,111	$3,022\ 313$	0,480 339
$40^{\circ} 0' 50'', 535$	153 673,61	56 981,516	$2^{\circ}, 696\ 903$	0,430 865
$41\ 22\ 16,430$	943,13	53 944,621	$0,017\ 483$	0,242 625 — 2
$42\ 17\ 51,100$	104 555,87	56 975,226	$1,835\ 111$	0,263 662
$44\ 41\ 48,420$	168 846,70	56 977,357	$2,963\ 400$	0,471 790
$47\ 30\ 45,955$	152 293,10	57 069,309	$2,668\ 564$	0,426 278
$49\ 56\ 29,110$	124 944,80	57 085,149	$2,188\ 744$	0,340 195
$51^{\circ} 2' 53'', 317$	49 059,89	57 131,875	$0^{\circ}, 858\ 713$	0,933 848 — 1
$51\ 39\ 33,316$	20 769,30	57 135,602	$0,363\ 509$	0,560 515 — 1
$52\ 1\ 57,832$	21 867,20	57 028,376	$0,383\ 444$	0,583 702 — 1
$52\ 50\ 29,581$	70 379,54	57 024,693	$1,234\ 194$	0,091 383
$52^{\circ} 32' 16'', 560$	115 163,725	57 126,280	$2^{\circ}, 015\ 950$	0,304 480
$54^{\circ} 8' 13'', 699$	87 436,538	57 093,064	$1^{\circ}, 531\ 474$	0,185 107
$4^{\circ} 28' 0'', 983$	28 211,629	57 088,210	$0^{\circ}, 494\ 176$	0,693 877 — 1
$5\ 13\ 15,473$	57 965,346	57 172,145	$1,013\ 874$	0,005 984
$3^{\circ} 20' 52'', 692$	148 811,418	57 090,879	$2^{\circ}, 606\ 571$	0,416 070
$5\ 34\ 34,541$	105 732,036	57 152,084	$1,850\ 012$	0,267 174
$6\ 32\ 28,056$	4 566,631	57 284,169	$0,079\ 719$	0,901 561 — 2
$7\ 28\ 49,415$	102 714,376	57 101,169	$1,798\ 814$	0,254 986
$9\ 13\ 58,526$	97 538,547	57 165,533	$1,706\ 247$	0,232 042
$10^{\circ} 20' 10'', 048$	92 777,981	57 196,166	$1^{\circ}, 622\ 101$	0,210 078

$$[g.M] = 2\ 881\ 111,65$$

$$[g] = 50^{\circ}, 590\ 273$$

70 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Name der Gradmessung.	Station.	10. $\log \cos 2 \varphi$	11. $\log \cos^2 2 \varphi$	12. $\log g \cdot M$
1. Peruanische . .	Tarqui			
	Cotchesqui	9,999 391	9,998 782	5,247 668
2. Erste ostindische	Trivandeporum			
	Paudree	9,956 999	9,913 997	4,953 339
3. Zweite ostindi-	Punnae			
sche	Putchapolliam	9,975 267	9,950 535	5,206 675
	Dodagoontáh	9,960 754	9,921 508	5,055 952
	Namthabad	9,945 547	9,891 094	5,076 035
	Daumeragidda	9,922 837	9,845 675	5,224 952
	Takal K'hera	9,889 566	9,779 132	5,237 746
	Kallianpoor	9,847 829	9,695 659	5,234 522
4. Französische . .	Formentera			
	Montjouy	9,238 462	8,476 923	5,186 599
	Barcelona	9,101 504	8,203 009	2,974 572
	Carcassonne	8,974 024	7,948 048	5,019 348
	Evaux	8,024 651	6,049 303	5,227 493
	Panthéon	8,942 502 <i>n</i>	7,885 004	5,182 680
	Dünkirchen	9,234 603 <i>n</i>	8,469 207	5,096 718
5. Englische . . .	Dunnose			
	Greenwich	9,321 288 <i>n</i>	8,642 577	4,690 727
	Blenheim	9,362 415 <i>n</i>	8,724 830	4,317 422
	Arburyhill	9,385 661 <i>n</i>	8,771 321	4,339 793
	Clifton	9,431 873 <i>n</i>	8,863 745	4,847 446
6. Hannoversche .	Göttingen			
	Altona	9,415 137 <i>n</i>	8,830 273	5,061 316
7. Dänische	Lauenburg			
	Lyssabel	9,496 329 <i>n</i>	8,992 658	4,941 693
8. Preussische . .	Trunz			
	Königsberg	9,511 184 <i>n</i>	9,022 367	4,450 428
	Memel	9,543 146 <i>n</i>	9,086 292	4,763 168
9. Russische . . .	Belin			
	Nemesch	9,458 325 <i>n</i>	8,916 649	5,172 636
	Jacobstadt	9,557 329 <i>n</i>	9,114 658	5,024 207
	Bristen	9,593 344 <i>n</i>	9,186 688	3,659 596
	Dorpat	9,625 310 <i>n</i>	9,250 621	5,011 631
	Hochland	9,678 186 <i>n</i>	9,356 372	4,989 176
10. Schwedische .	Malörn			
	Pahtawara	9,831 104 <i>n</i>	9,662 208	4,967 445

13.	14.	15.	16.	17.	18.
$g \cos 2 \varphi$	Zahl.	$\log g M \cos 2 \varphi$	Zahl.	$\log g \cos^2 2 \varphi$	Zahl.
0,493 215	3,113 258	5,247 059	176 627,65	0,492 606	3,108 895
0,156 299	1,433 173	4,910 338	81 346,32	0,113 297	1,298 067
0,428 039	2,679 411	5,181 942	152 034,52	0,403 307	2,531 085
0,262 380	1,829 701	5,016 706	103 921,62	0,223 134	1,671 607
0,267 847	1,852 878	5,021 582	105 095,00	0,213 394	1,634 533
0,393 586	2,475 061	5,147 789	140 536,71	0,316 424	2,072 160
0,372 887	2,359 866	5,127 312	134 063,90	0,262 453	1,830 010
0,328 168	2,128 964	5,082 351	120 879,17	0,175 998	1,499 677
0,669 327	0,467 010	4,425 061	26 610,97	8,907 788	0,080 870
7,344 129	0,002 209	2,076 076	119,15	6,445 634	0,000 279
9,237 686	0,172 857	3,993 372	9 848,56	8,211 711	0,016 282
8,496 441	0,031 365	3,252 144	1 787,08	6,521 093	0,000 332
9,368 780 <i>n</i>	0,233 765 <i>n</i>	4,125 182 <i>n</i>	13 340,81 <i>n</i>	8,311 282	0,020 478
9,574 798 <i>n</i>	0,375 663 <i>n</i>	4,331 321 <i>n</i>	21 444,78 <i>n</i>	8,809 402	0,064 477
9,255 136 <i>n</i>	0,179 944 <i>n</i>	4,012 015 <i>n</i>	10,280,52 <i>n</i>	8,576 425	0,037 708
8,922 930 <i>n</i>	0,083 739 <i>n</i>	3,679 837 <i>n</i>	4 784,50 <i>n</i>	8,285 345	0,019 291
8,969 363 <i>n</i>	0,093 188 <i>n</i>	3,725 454 <i>n</i>	5 314,39 <i>n</i>	8,355 023	0,022 648
9,523 256 <i>n</i>	0,333 623 <i>n</i>	4,279 319 <i>n</i>	19 024,75 <i>n</i>	8,955 128	0,090 184
9,719 617 <i>n</i>	0,524 344 <i>n</i>	4,476 453 <i>n</i>	29 953,83 <i>n</i>	9,134 753	0,136 381
9,681 436 <i>n</i>	0,480 215 <i>n</i>	4,438 022 <i>n</i>	27 417,14 <i>n</i>	9,177 765	0,150 579
9,205 061 <i>n</i>	0,160 347 <i>n</i>	3,961 612 <i>n</i>	9 154,02 <i>n</i>	8,716 244	0,052 029
9,549 130 <i>n</i>	0,354 103 <i>n</i>	4,306 314 <i>n</i>	20 244,84 <i>n</i>	9,092 276	0,123 670
9,874 395 <i>n</i>	0,748 849 <i>n</i>	4,630 961 <i>n</i>	42 752,42 <i>n</i>	9,332 719	0,215 139
9,824 503 <i>n</i>	0,667 580 <i>n</i>	4,581 536 <i>n</i>	38 153,61 <i>n</i>	9,381 832	0,240 898
8,494 905 <i>n</i>	0,031 254 <i>n</i>	3,252 940 <i>n</i>	1 790,36 <i>n</i>	8,088 249	0,012 253
9,880 297 <i>n</i>	0,759 096 <i>n</i>	4,636 941 <i>n</i>	43 345,25 <i>n</i>	9,505 607	0,320 337
9,910 228 <i>n</i>	0,813 257 <i>n</i>	4,667 362 <i>n</i>	46 490,29 <i>n</i>	9,588 414	9,387 627
0,041 182 <i>n</i>	1,099 466 <i>n</i>	4,798 549 <i>n</i>	62 885,23 <i>n</i>	9,872 286	0,745 222

$[g \cos 2 \varphi] = 11,607 320$ $[g M \cos 2 \varphi] = 656 493,91$ $[g \cos^2 2 \varphi] = 18,382 718$

72 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Barcelona eingebüsst wurde. Die Spalte 7, welche die Grösse der einzelnen Meridiangrade, den Messungen zufolge, enthält, ist vorläufig überflüssig und wird erst gebraucht, um die übrigbleibenden Fehler zu ermitteln; sie ist aber an sich interessant, weil sie das Wachsen der Meridiangrade nach dem Pole zu unzweideutig darlegt.

Die erste Normalgleichung ergibt sich nun aus der Addition folgender ursprünglichen Gleichungen:

Spalte 6.	Spalte 8.	Spalte 14.
176 875,5 =	3,117 626 p —	3,113 258 q
89 813,01 =	1,582 341 p —	1,433 173 q
160 944,20 =	2,836 429 p —	2,679 411 q
113 750,10 =	2,002 747 p —	1,829 701 q
119 133,79 =	2,100 388 p —	1,852 878 q u. s. w.

zu

$$\text{I.} \quad 2881\,111,65 = 50,590\,273\,p - 11,607\,320\,q.$$

Ebenso erhält man die zweite durch Addition der Gleichungen

Spalte 16.	Spalte 14.	Spalte 18.
176 627,65 =	3,113 258 p —	3,108 895 q
81 346,32 =	1,433 173 p —	1,298 067 q
152 034,52 =	2,679 411 p —	2,531 085 q
103 921,62 =	1,829 701 p —	1,671 607 q
105 095,00 =	1,852 878 p —	1,634 533 q u. s. w.

Die zweite Normalgleichung wird demzufolge

$$\text{II.} \quad 656\,493,91 = 11,607\,320\,p - 18,382\,718\,q.$$

Da sich aus ihnen, selbst mit Hülfe siebenstelliger Logarithmen, p und q nicht scharf berechnen lassen, so setze man zur Vermeidung der grossen Zahlen $p = 57000 + p_1$, $q = 290 + q_1$; man hat alsdann

$$832,21 = 50,590\,273\,p_1 - 11,607\,320\,q_1$$

$$207,66 = 11,607\,320\,p_1 - 18,382\,718\,q_1$$

Man hat nun, wenn man q_1 eliminiert,

$$\log 832,21 = 2,92024 \text{ und } \log 50,590.. = 1,70406$$

$$\log 18,382.. = 1,26441 \quad \log 18,382.. = 1,26441$$

$$1) \quad \log 15298,3 = 4,18465 \quad \log 929,98 = 2,96847$$

$$\text{ferner } \log 207,66 = 2,31736$$

$$\log 11,6073 = 1,06473 \text{ und } 2.\log 11,6073 = 2,12946 =$$

$$2) \quad \log 2410,4 = 3,38209; \quad \log 134,72$$

$$\text{folglich } 12887,9 = 795,26\,p_1$$

$\log$	12887,9	=	4,11018
$\log$	795,26	=	2,90051
$\log$	16,206	=	1,20967 = $\log p_1$.
$\log$	50,590	=	1,70406
$\log$	819,80	=	2,91371
	832,21		
$\log$	12,41 n	=	1,09377 n
$\log$	11,607	=	1,06473
$\log$	1,069 n	=	0,02904 n = $\log q_1$.

Da also sich ergibt

$$p_1 = 16,206 \text{ und } q_1 = -1,069,$$

so hat man

$$p = 57016,206 \text{ und } q = -288,931.$$

Also ist die Grösse eines Meridiangrades ausgedrückt durch die Formel

$$57016',206 - 288',931 \cos 2\varphi.$$

In Folge dieser Rechnung wäre demnach die Grösse des mittleren Meridiangrades, d. h. des Grades, dessen mittlere Polhöhe $= 45^\circ$ gesetzt wird, $= 57016',206$, während nach der Formel von Bessel sich ergibt $57012,498$, also $3',708$ weniger.

Setzt man aber $\varphi = 0$, so wird die Uebereinstimmung grösser. Aus der obigen Formel erhält man $57016',206 - 288',931 = 56727',275$, während man nach Bessel erhält $56727',383$, mit einem nicht nennenswerthen Unterschiede von $0',108$.

Da im Allgemeinen 16 Toisen gleich 1 Sekunde Unterschied in den Polhöhen zu setzen sind, so würden obige $3',708$ einer Differenz von 0,232 Sekunden in den Polhöhen gleichkommen, ein Unterschied, der leicht aus der ganz verschiedenartigen Rechnung sich ergeben kann.

39. Man kann indessen dem von Bessel gefundenen Ausdruck für die Grösse des Meridiangrades, besonders auf mittlerer Breite, noch bedeutend näher kommen, selbst so nahe, wie mit obigem Ausdruck dem Werth des Meridiangrades auf der mittleren Breite von 0° , wenn man die Entwicklung der Formel bis zum dritten Gliede fortführt und, um einen convergenten Ausdruck zu bekommen, die Formel fortschreiten lässt nicht nach den $\cos$ der vielfachen φ , sondern nach höhern Potenzen von $\cos 2\varphi$. Man nehme also als neue Form der Function

74 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

$$M = p + q \cos 2 \varphi + r \cdot \cos^2 2 \varphi,$$

so werden die neuen Normalgleichungen die Form erhalten

$$[gM] = p [g] + q [g \cos 2 \varphi] + r [g \cos^2 2 \varphi]$$

$$[gM \cos 2 \varphi] = p [g \cos 2 \varphi] + q [g \cos^2 2 \varphi] + r [g \cos^3 2 \varphi]$$

$$[gM \cos^2 2 \varphi] = p [g \cos^2 2 \varphi] + q [g \cos^3 2 \varphi] + r [g \cdot \cos^4 2 \varphi],$$

indem gleich die Gewichte beigelegt sind. Eine einfache Ver-

Name der Gradmessung.	$\log \cos^3 2 \varphi$	$\log g \cdot \cos^3 2 \varphi$	Zahl.
1. Peruanische	9,999 173	0,492 997	3,111 696
2. Erste ostindische .	9,870 996	0,070 296	1,175 699
3. Zweite ostindische	9,925 802	0,378 574	2,390 970
	9,882 262	0,183 888	1,527 174
	9,836 641	0,158 941	1,441 920
	9,768 511	0,239 260	1,734 841
	9,668 698	0,152 020	1,419 121
	9,543 488	0,023 827	1,056 397
4. Französische	7,715 385	8,146 250	0,014 004
	7,304 513	5,547 138	0,000 035
	6,922 073	7,185 735	0,001 533
	4,073 954	4,545 744	0,000 004
	6,827 507 <i>n</i>	7,253 783 <i>n</i>	0,001 794 <i>n</i>
	7,703 810 <i>n</i>	8,044 005 <i>n</i>	0,011 066 <i>n</i>
5. Englische	7,963 865 <i>n</i>	7,907 713 <i>n</i>	0,008 086 <i>n</i>
	8,087 244 <i>n</i>	7,647 760 <i>n</i>	0,004 444 <i>n</i>
	8,156 982 <i>n</i>	7,740 684 <i>n</i>	0,005 504 <i>n</i>
	8,295 618 <i>n</i>	8,387 001 <i>n</i>	0,024 377 <i>n</i>
6. Hannoversche	8,245 410 <i>n</i>	8,549 890 <i>n</i>	0,035 472 <i>n</i>
7. Dänische	8,488 988 <i>n</i>	8,674 094 <i>n</i>	0,047 217 <i>n</i>
8. Preussische	8,533 551 <i>n</i>	8,227 428 <i>n</i>	0,016 882 <i>n</i>
	8,629 438 <i>n</i>	8,635 422 <i>n</i>	0,043 194 <i>n</i>
9. Russische	8,374 974 <i>n</i>	8,791 043 <i>n</i>	0,086 928 <i>n</i>
	8,671 987 <i>n</i>	8,939 161 <i>n</i>	0,061 808 <i>n</i>
	8,780 032 <i>n</i>	7,681 593 <i>n</i>	0,004 804 <i>n</i>
	8,875 931 <i>n</i>	9,130 917 <i>n</i>	0,135 181 <i>n</i>
	9,034 558 <i>n</i>	9,266 600 <i>n</i>	0,184 756 <i>n</i>
10. Schwedische	9,493 312 <i>n</i>	9,703 390 <i>n</i>	0,505 114 <i>n</i>

$$[g \cos^3 2 \varphi] = 12,696 567$$

gleichung mit den früheren Normalgleichungen zeigt, dass nur noch die Summen $[g \cos^3 2\varphi]$, $[g \cos^4 2\varphi]$ und $[gM \cos^2 2\varphi]$ neu zu berechnen sind. Die Vorzeichen sind der Bequemlichkeit halber alle positiv genommen; die Rechnung wird ergeben, ob r positiv oder negativ wird. Im Anschluss an die frühere Rechnung hat man:

$\log . \cos^4 2 \varphi$	$\log g . \cos^4 2 \varphi$	Zahl.	$\log g M \cos^2 2 \varphi$	Zahl.
9,997 564	0,491 388	3,100 189	5,246 450	176 380,23
9,827 995	0,027 295	1,064 865	4,867 337	73 677,80
9,901 070	0,353 842	2,258 612	5,157 210	143 618,23
9,843 016	0,144 643	1,395 219	4,977 460	94 942,34
9,782 188	0,104 488	1,272 003	4,967 129	92 710,54
9,691 350	0,162 098	1,452 440	5,070 627	117 659,51
9,558 264	0,041 586	1,100 489	5,016 878	103 962,79
9,391 317	9,871 656	0,744 143	4,930 181	85 149,28
6,953 846	7,384 711	0,002 425	3,663 522	4 608,10
6,406 018	4,648 643	0,000 004	1,177 580	15,05
5,896 097	6,159 759	0,000 144	2,967 397	927,67
2,098 605	2,570 396	0,000 000	1,276 795	18,92
5,770 009	6,196 286	0,000 157	3,067 685	1 168,65
6,938 414	7,278 609	0,001 899	3,565 925	3 680,65
7,285 154	7,219 002	0,001 656	3,333 303	2 154,28
7,449 659	7,010 174	0,001 024	3,042 252	1 102,18
7,542 642	7,126 344	0,001 338	3,111 114	1 291,56
7,727 490	7,818 873	0,006 590	3,711 191	5 142,70
7,660 547	7,965 027	0,009 226	3,891 589	7 790,27
7,985 317	8,170 424	0,014 805	3,934 351	8 597,90
8,044 735	7,738 612	0,005 478	3,472 795	2 970,27
8,172 584	8,178 568	0,015 086	3,849 460	7 070,67
7,833 298	8,249 368	0,017 757	4,089 285	12 282,46
8,229 316	8,496 490	0,031 368	4,138 865	13 767,80
8,373 376	7,274 937	0,001 883	2,846 284	701,91
8,501 241	8,756 227	0,057 046	4,262 252	18 291,60
8,712 744	8,944 786	0,088 061	4,345 548	22 158,89
9,324 416	9,534 494	0,342 368	4,629 653	42 623,84

$$[g \cos^4 2 \varphi] = 12,986 275$$

$$[gM \cos^2 2 \varphi] = 1 044 466,09$$

76 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Hieraus erhält man die Normalgleichungen

$$2881\ 111,65 = 50,590\ 273\ p + 11,607\ 320\ q + 18,382\ 718\ r$$

$$656\ 493,91 = 11,607\ 320\ p + 18,382\ 718\ q + 12,696\ 567\ r$$

$$1044\ 466,09 = 18,382\ 718\ p + 12,696\ 567\ q + 12,986\ 275\ r,$$

welche, wenn man jetzt $p = 57010 + p_1$

$$q = -290 + q_1$$

$$r = 10 + r_1 \text{ nach ungefährrer Schätzung setzt, übergehen in}$$

$$142,48 = 50,590\ 273\ p_1 + 11,607\ 320\ q_1 + 18,382\ 718\ r_1$$

$$-35,38 = 11,607\ 320\ p_1 + 18,382\ 718\ q_1 + 12,696\ 567\ r_1$$

$$19,48 = 18,382\ 718\ p_1 + 12,696\ 567\ q_1 + 12,986\ 275\ r_1.$$

In scharfer Rechnung ergibt sich hieraus

$$\log 142,48 = 2,153\ 7539, \log 50,590\ 273 = 1,704\ 0670, \log 11,607\ 320 = 1,064\ 7320$$

$$\log 12,696\ 567 = 1,103\ 6863 \quad . \quad . \quad . \quad = 1,103\ 6863 \quad . \quad . \quad . \quad = 1,103\ 6863$$

$$3,257\ 4402$$

$$2,807\ 7533$$

$$2,168\ 4183$$

$$1) \quad 1809,067 = 642,3227\ p_1 + 147,3731\ q_1 + \dots$$

$$\log 35,38\ n = 1,548\ 7578\ n, \log 11,607\ 320 = 1,064\ 7320, \log 18,382\ 718 = 1,264\ 4097$$

$$\log 18,382\ 718 = 1,264\ 4097 \quad . \quad . \quad . \quad = 1,264\ 4097 \quad . \quad . \quad . \quad = 1,264\ 4097$$

$$2,813\ 1675\ n$$

$$2,329\ 1417$$

$$2,528\ 8194$$

$$2) \quad -650,3804 = 213,3741\ p_1 + 337,9243\ q_1 + \dots$$

$$1) - 2) \text{ oder } 3) \quad 2459,4474 = 428,9486\ p_1 - 190,5512\ q_1$$

Ferner

$$\log 142,48 = 2,153\ 7539 \quad \log 50,590\ 273 = 1,704\ 0670 \quad \log 11,607\ 320 = 1,064\ 7320$$

$$\log 12,986\ 275 = 1,113\ 4846 \quad . \quad . \quad . \quad = 1,113\ 4846 \quad . \quad . \quad . \quad = 1,113\ 4846$$

$$3,267\ 2385$$

$$2,817\ 5516$$

$$2,178\ 2166$$

$$4) \quad 1850,2847 = 656,9793\ p_1 + 150,7359\ q_1 + \dots$$

$$\log 19,48 = 1,289\ 5890 \quad \log 18,382\ 718 = 1,264\ 4097 \quad \log 12,696\ 567 = 1,103\ 6863$$

$$\log 18,382\ 718 = 1,264\ 4097 \quad . \quad . \quad . \quad = 1,264\ 4097 \quad . \quad . \quad . \quad = 1,264\ 4097$$

$$2,553\ 9987$$

$$2,528\ 8194$$

$$2,368\ 0960$$

$$5) \quad 358,0953 = 337,9243\ p_1 + 233,3974\ q_1 + \dots$$

$$4) - 5) \text{ oder } 6) \quad 1492,1894 = 319,0550\ p_1 - 82,6615\ q_1$$

Aus 3) und 6) findet man sodann

$$\log 2459,447 = 3,390\ 8375 \quad \log 428,9486 = 2,632\ 4052$$

$$\log 82,6615 = 1,917\ 3033 \quad . \quad . \quad . \quad = 1,917\ 3033$$

$$5,308\ 1408$$

$$4,549\ 7085$$

$$7) \quad 203\ 301,6 = 35457,53\ p_1 - \dots q_1$$

$$\log 1492,189 = 3,173\ 8239 \quad \log 319,0550 = 2,503\ 8655$$

$$\log 190,5512 = 2,280\ 0118 \quad . \quad . \quad . \quad = 2,280\ 0118$$

$$5,453\ 8357$$

$$4,783\ 8773$$

$$8) \quad 284\ 338,5 = 60796,33\ p_1 - \dots q_1$$

$$8) - 7) \text{ oder } 9) \quad 81036,9 = 25338,80\ p_1$$

$$\log 81036,9 = 4,908\ 6829$$

$$\log 25338,8 = 4,403\ 7861$$

$$\log p_1 = 0,504\ 8968$$

$$p_1 = 3,198\ 35,$$

Um q aus Gleichung 3) zu finden, hat man

$$\log 428,9486 = 2,632\,4052$$

$$\log p_1 = 0,504\,8968$$

$$\hline 3,137\,3020$$

$$\text{Zahl } 1371,835$$

$$\text{aus Gl. 3) } 2459,447$$

$$\hline 1087,612 = -190,5512\,q_1$$

$$\log 1087,612 = 3,036\,4740$$

$$\log 190,5512\,n = 2,280\,0118\,n$$

$$\hline \log q_1 = 0,756\,4622\,n$$

$$q_1 = -5,707\,71.$$

Ferner findet man r aus der ersten Normalgleichung

$$\log 50,590\,273 = 1,704\,0670$$

$$\log 11,607\,320 = 1,064\,7320$$

$$\log p = 0,504\,8968$$

$$\log q = 0,756\,4622\,n$$

$$\hline 2,208\,9638$$

$$\hline 1,821\,1942\,n$$

$$161,7945 \dots \dots \dots -66,2513$$

$$= 95,5432$$

aus der ersten Norm.-Gleich. hat man $142,48$

$$\hline 46,9368 = 18,3827\,r_1$$

$$\log 46,9368 = 1,671\,5135$$

$$\log 18,3827 = 1,264\,4097$$

$$\hline \log r_1 = 0,407\,1038$$

$$r_1 = 2,553\,31.$$

Mithin lautet der Ausdruck für die Grösse eines Meridiangrades, dessen mittlere Breite $= \varphi$ ist,

$$57013',198 - 295',708 \cos 2\varphi + 12',553 \cos^2 2\varphi,$$

während Bessel fand

$$57013',109 - 286',337 \cos 2\varphi + 0,611 \cos 4\varphi.$$

Setzt man $\varphi = 45^\circ$, wodurch die beiden letzten Glieder in den Formeln verschwinden, so hat man fast völlige Uebereinstimmung, da die Differenz von $-0',089$ ganz irrelevant ist und sich aus der verschiedenen Art der Rechnung genügend erklärt. Für $\varphi = 0$ erhalte ich $56730,043$ mit einem Unterschiede von $-2',660$ gegen Bessels Werth, so dass, wie schon bemerkt, mein erster Ausdruck $57016',206 - 288',931 \cos 2\varphi$ die Grösse des Meridiangrades auf niederer Breite genauer bestimmt, während der letztere Ausdruck sich der Bessel'schen Bestimmung auf höherer Breite genauer anschliesst. In jedem Falle ist der

78 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

materielle Beweis geliefert, dass auf diesem hier verfolgten Wege eine vollständig genügende, alle frühern Bestimmungen an Präcision weit übertreffende Berechnung des Meridiangrades ausgeführt werden kann.

Anm. Mit fünfstelligen Logarithmen berechnet, geben übrigens obige Normalgleichungen auch ganz befriedigende Werthe für p_1 , q_1 , r_1 , nämlich $p_1 = 3,1985$, $q_1 = -5,7064$, $r_1 = 2,5517$. Es sollte aber selbst der Schatten eines Einwandes fern gehalten werden. Wittstein in seinem kurzen Vorwort zu den von ihm herausgegebenen vierstelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln (Hannover, bei Hahn, 1860), welche zusammen mit dessen fünfstelligen Logarithmen eine sehr brauchbare und empfehlenswerthe Ausgabe von Logarithmentafeln bilden, hat gewiss Recht, wenn er sagt, es sei „eine unzweifelhafte Thatsache, dass man bei logarithmischen Rechnungen meistens viel mehr Bruchstellen in Gebrauch nehme, als die Genauigkeit der zu suchenden Resultate erfordere, und dadurch sich die Arbeit ohne Noth beschwerlich und zeitraubend mache; sieben — oder mehr als siebenstellige Logarithmen seien nur in äusserst seltenen Fällen nothwendig; in der Regel reichen fünfstellige Logarithmen vollkommen aus; ja in Fällen, wenn man eine Zahl auf nicht mehr als 4 Ziffern, und einen Winkel nicht genauer als auf Minuten zu kennen verlange, liefern vierstellige Logarithmen ein vollkommen zuverlässiges Resultat“. Da in der obigen Rechnung Additionen von 28 Zahlen vorkommen, wodurch die dritte Ziffer von rechts zweifelhaft wird, so wird sich die Rechnung mit sechsstelligen Logarithmen rechtfertigen, weil sie Zahlen mit 6 ganzen Stellen liefern sollten.

40. Es erübrigt noch, einen Blick auf die jetzt übrigbleibenden Fehler zu werfen, da die Ableitung der übrigen Dimensionen des idealen Erdkörpers nicht weiter hieher gehört; sie finden sich in folgender Zusammenstellung (S. 80 u. 81), mit Auslassung der beiden Fehler, welche den übermässig kleinen Amplituden zwischen Barcelona und Montjouy und Jacobstadt und Bristen entsprechen, da sich aus Amplituden von 1' bis 4' nicht füglich auf die Grösse eines vollen Grades schliessen lässt (in der dargelegten Rechnung dienten gerade die Gewichte, um den Schluss auf sein zulässiges Maass zu reducieren).

41. Um nun die Vergleichung abzuschliessen, betrachten wir noch, ohne freilich im Vorigen die Entwicklung des bezüglichen Satzes gegeben zu haben, die Grösse des mittleren Werthes dieser Fehler; (die weitere Fortführung der ganzen Lehre von der Methode der kleinsten Quadrate bleibt absichtlich einer spätern Betrachtung vorbehalten, um dem Anfänger Zeit und Gelegenheit

zu lassen, sich in dem mechanischen Theile der einschlagenden Arbeiten vorab festzusetzen). Man findet denselben, wenn man die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler durch die Menge der ursprünglichen Gleichungen, hier 26, vermindert um die Anzahl der Normalgleichungen, hier 3, dividiert und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht. Man hätte also als mittleren Werth dieser Fehler

$$\sqrt{\frac{36518,834147}{26-3}} = \pm 39',847,$$

während Bessel findet $\sqrt{\frac{181,221}{38-12}} = \pm 2'',640$, welche für die mittlere Breite von 0° , auf welcher $1 \text{ Grad} = 56727',383$, also $1 \text{ Sekunde} = 15',758$ ist, einem Werth von $41',601$ entsprechen, während auf 45° mittlerer Breite $2'',640 = 41',810$ sein würden. Die Uebereinstimmung ist offenbar so gross, dass sie keiner weiteren Beleuchtung bedarf. Den mittleren Fehler eines Meridiangrades, den man mit obigem Fehler nicht verwechseln darf, findet Bessel sodann durch Berücksichtigung der Gewichte der Bestimmungen der Unbekannten zu $\pm 2',8403$, welchem Werthe sich unsere Berechnung aufs nächste anschliesst.

Einen dem Bessel'schen Werthe der Abplattung $\frac{1}{299,153}$ sehr nahe kommenden Werth giebt die Schmidt'sche Formel, wenn man die erste ostindische und die erste russische Messung mit einander vergleicht. Man hat dort

$$G = 57\,099,188 \text{ und } \varphi = 53^\circ 20' 52'',692$$

$$g = 56\,755,669 \quad \psi = 12\,32\,20,804$$

$$\varphi - \psi = 40^\circ 48' 31'',888 \quad \log \sin 9,815\,2705$$

$$\varphi + \psi = 65\,52\,73,496 \quad \log \sin 9,960\,3481$$

$$g = 56\,755,669 \quad \log 4,754\,0092$$

$$\text{Factor } 3 \quad \log 0,477\,1213$$

$$G = 57\,099,188 \quad \text{colog } 7,464\,0493$$

$$\log 295,664 = 2,470\,7984$$

oder die Abplattung $\frac{1}{295,664}$; Bessels mittlerer Werth der Abplattung enthält den Fehler $\pm 4,667$ Einheiten, weshalb der genannte Werth als dem richtigen Werth fast gleichkommend anzusehen ist.

80 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Name der Gradmessung.	Station.	Mittelbreite.	Gemessene Grösse des Grades, <i>M</i> .
1. Peruanische	Tarqui		
	Cotchesqui	1° 31' 0'',340	56 734 ^t ,026
2. Erste ostindische .	Trivandeporum		
	Paudree	12° 32' 20'',804	56 759 ^t ,576
3. Zweite ostindische	Punnae		
	Putchapolliam	9° 34' 36'',704	56 741 ^t ,842
	Dodagoontáh	11 59 47 ,221	56 797 ,042
	Namthabad	14 2 52 ,864	56 719 ,896
	Daumeragidda	16 34 34 ,904	56 781 ,086
	Takal K'hera	19 34 33 ,889	56 809 ,952
	Kallianpoor	22 36 31 ,696	56 778 ,111
4. Französische . . .	Formentera		
	Montjouy	40° 0' 50'',535	56 981 ^t ,516
	Barcelona	41 22 16 ,430	53 944 ,621
	Carcassonne	42 17 51 ,100	56 975 ,226
	Evaux	44 41 48 ,420	56 977 ,357
	Panthéon	47 30 45 ,955	57 069 ,309
	Dünkirchen	49 56 29 ,110	57 085 ,149
5. Englische	Dunnose		
	Greenwich	51° 2' 53'',317	57 131 ^t ,875
	Blenheim	51 39 33 ,316	57 135 ,602
	Arburyhill	52 1 57 ,832	57 028 ,376
	Clifton	52 50 29 ,581	57 024 ,693
6. Hannoversche . . .	Göttingen		
	Altona	52° 32' 16'',560	57 126 ^t ,280
7. Dänische	Lauenburg		
	Lyssabel	54° 8' 13'',699	57 093 ^t ,064
8. Preussische	Trunz		
	Königsberg	54° 28' 0'',983	57 088 ^t ,210
	Memel	55 13 15 ,473	57 172 ,145
9. Russische	Belin		
	Nemesch	53° 20' 52'',692	57 090 ^t ,879
	Jacobstadt	55 34 34 ,541	57 152 ,084
	Bristen	56 32 28 ,056	57 284 ,169
	Dorpat	57 28 49 ,415	57 101 ,169
	Hochland	59 13 53 ,526	57 165 ,533
10. Schwedische . . .	Malörn		
	Pahtawara	66° 20' 10'',048	57 196 ^t ,166

Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler. 81

Berechnete Grösse des Grades, F .	$F - M$.	$(F - M)^2$	Bessels Fehler der Polhöhen.
			— 0'',606
56 730 ^t ,423	— 3 ^t ,603	12,981 609	+ 0 ,606
			— 0'',271
56 755 ^t ,669	— 3 ^t ,907	15,264 649	+ 0 ,271
			— 1'',470
56 745 ^t ,063	+ 3 ^t ,221	10,374 841	— 1 ,712
56 753 ,523	— 43 ,519	1893,903 361	+ 4 ,016
56 762 ,104	+ 42 ,208	1781,515 264	— 1 ,447
56 774 ,426	— 6 ,660	44,355 600	— 0 ,065
56 891 ,431	+ 81 ,479	6638,827 441	+ 3 ,537
56 811 ,127	+ 33 ,016	1090,056 256	— 2 ,859
			+ 0'',955
56 962 ^t ,368	— 19 ^t ,148	366,645 904	+ 4 ,115
56 976 ,042	—	—	+ 0 ,764
56 985 ,456	+ 10 ,230	104,652 900	— 0 ,433
57 010 ,069	+ 32 ,712	1070,074 944	— 6 ,447
57 039 ,198	— 30 ,111	906,672 321	— 1 ,099
57 064 ,320	— 20 ,829	433,847 241	+ 2 ,144
			— 1'',816
57 075 ^t ,715	— 56 ^t ,160	3153,945 600	— 1 ,396
57 081 ,983	— 53 ,619	2874,997 161	+ 2 ,705
57 085 ,805	+ 57 ,429	3298,090 041	+ 1 ,395
57 094 ,048	+ 69 ,355	4810,116 025	— 3 ,679
			— 2'',493
57 090 ^t ,951	— 35 ^t ,329	1248,138 241	+ 2 ,493
			+ 0'',451
57 107 ^t ,157	+ 14 ^t ,093	198,612 649	— 0 ,451
			— 0'',907
57 110 ^t ,470	+ 22 ^t ,260	495,507 600	— 1 ,448
57 118 ,008	— 54 ,137	2930,814 769	+ 2 ,355
			— 1'',732
57 099 ^t ,188	+ 8 ^t ,309	69,039 481	— 2 ,384
57 121 ,539	— 30 ,545	932,997 025	+ 1 ,826
57 131 ,059	—	—	+ 2 ,627
57 140 ,221	+ 39 ,052	1525,058 704	— 1 ,044
57 156 ,995	— 8 ,538	72,897 444	+ 0 ,607
			+ 0'',560
57 219 ^t ,392	+ 23 ^t ,226	539,447 076	— 0 ,560

$$\Sigma (F-M)^2 = 36518,834 147$$

42. Bestimmung der Breite eines Orts und der Durchbiegungs-Constante des Fernrohrs eines Universalinstruments mittelst beobachteter Meridional-Zenithdistanzen von Sternen.

Es ist schon oben gelegentlich angedeutet worden, dass die für Refraction verbesserte Zenithdistanz eines Sterns bei seinem Durchgange durch den Meridian und die Declination dieses Sterns mittelst einer einfachen Addition oder Subtraction dieser Werthe die Breite des Beobachtungsorts ergeben. Die (wahre) Zenithdistanz eines Sterns aber erhält man entweder indirect durch Höhenbeobachtung desselben über dem künstlichen Horizont, (oder wie auf See über der Kimm) mittelst der Sextanten, Reflexionskreise u. s. w. und Anbringung der bekannten Berichtigungen, oder direct durch Ablesung am Vertikalkreise eines Universalinstruments, oder eines Passageninstruments u. s. w. und Verbesserung der abgelesenen Werthe wegen Refraction. — Wir wollen uns in Folgendem denken, dass directe Beobachtungen von Meridional-Zenithdistanzen, oder solcher, die auf den Meridian reducirt sind, an einem Ertel'schen Universalinstrument angestellt sind. Wer eine eingehende Beschreibung des Instruments wünscht, verweisen wir auf Sawitsch praktische Astronomie I. pag. 156.

Es seien ferner alle nothwendigen Berichtigungen des Instruments vor dem Gebrauch vorgenommen, auch seien die Correctionen, welche man mittelst der Einstellung des Instruments nicht zu beseitigen, sondern lieber in der Rechnung zu berücksichtigen pflegt, als schon bekannt anzusehen, und es handle sich bloss noch darum, diejenige Correction der Beobachtungen zu ermitteln, welche die Schwere wegen der von ihr verursachten Durchbiegung des Fernrohrs nöthig macht. Endlich fehlen Mittel und Gelegenheit, um das von Bessel angegebene Verfahren zur Ermittlung dieser Durchbiegungs-Constante mittelst zweier vor und hinter dem Instrumente aufgestellter Fernröhre (cf. Sawitsch I. pag. 211) anzuwenden. Es bleibt dann, um zum Zweck zu gelangen, unter anderem noch der Weg übrig, den die Ueberschrift dieser Aufgabe andeutet.

Die Durchbiegung des Fernrohrs wird man sich am einfachsten dadurch bewirkt vorstellen, dass am Ende desselben ein Gewicht befestigt sei, welches bei horizontaler Lage des Fernrohrs eine grösste Durchbiegung verursachen wird, wäh-

rend bei vertikaler Stellung ein Einfluss auf die Ablesung sich nicht geltend machen kann. Das Gewicht ist aber die Schwere der hängenden Theile des Fernrohrs selber, und es ist zunächst klar, dass wenn einmal eine Durchbiegung in einer horizontalen Lage stattgefunden hat, wodurch das Objectiv des Fernrohrs sich nach unten geneigt hat, eine Umlegung des Instruments nach dem entgegengesetzten Theile des Horizonts zur Folge haben wird, dass jetzt das Objectiv nach oben gerichtet ist, dass folglich auch die Fehler der abgelesenen Winkel in den entgegengesetzten Lagen des Instruments verschiedene Vorzeichen haben werden. Es betrage dieser Fehler im Allgemeinen $\pm q$ Sekunden.

Um sodann zu ermitteln, wieviel von diesem grössten Fehler bei einer Zenithdistanz von z Graden in Rechnung zu führen sei, hat man sich die Wirkung der Schwere nach dem Kräftenparallelogramm nach zwei Richtungen zu zerlegen, von denen der eine Theil, längs der optischen Axe des Instruments wirkend, offenbar hier nicht zu berücksichtigen ist, während der andere Theil, senkrecht auf die optische Axe und zwar in einer Stärke $= q \cdot \sin z$ drehend, biegend auf das Fernrohr einwirkt. Es ist also $q \cdot \sin z$ der allgemeine Ausdruck der Correction für die Durchbiegung des Fernrohrs bei einer beliebigen Zenithdistanz z und sowohl positiv als negativ anzunehmen, und $z \pm q \cdot \sin z$ also der wahre Werth einer Zenithdistanz z , wo das $+$ Zeichen der Durchbiegungs-Constante für Zenithdistanzen gelten mag von Sternen, welche in der obern Culmination beobachtet sind.

Man kann sich nun die Breite φ des Ortes entweder als bekannt oder als unbekannt vorstellen. Man wird dann im ersten Fall, wenn die genau bekannte Declination des Sterns $= \pm \delta$ gesetzt wird, bei obern Culminationen für die Breite den Werth erhalten

$$\varphi = \pm \delta + z + q \sin z,$$

während bei unteren Culminationen, also wenn man Gestirne mit Declinationen δ_1 beobachtet, welche gleichnamig mit der Breite sind, man als Werth der Breite erhält

$$\varphi = 180^\circ - \delta_1 - z_1 - q \cdot \sin z_1,$$

wo z_1 die Zenithdistanz bei der unteren Culmination bedeutet. Durch Subtraction beider Gleichungen erhält man leicht den Werth der Durchbiegungs-Constante oder

$$q = \frac{180^\circ - (\delta_1 \pm \delta + z_1 + z)}{\sin z_1 + \sin z}.$$

84 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Von diesem Fall absehend, denken wir uns den zweiten Fall, dass ein Beobachter an einem Ort, dessen Breite unbekannt sei, mit einem bis auf die Grösse der Durchbiegungs-Constante berichtigten Instrument Meridional-Zenithdistanzen von einer Reihe von Sternen messe und sich nun die Aufgabe stelle, gleichzeitig die Breite und die Durchbiegungs-Constante des Instruments zu ermitteln. Man wird nun zunächst aus den erhaltenen wahren Zenithdistanzen unter Anbringung der Declination sich einen genäherten Werth φ_1 der Breite verschaffen können, der nur noch mit irgend einer Correction p versehen werden müsste, um die richtige Breite zu geben, und sich jetzt unter $\varphi_1 + p$ die richtige Breite φ vorstellen. Die obigen Gleichungen würden also jetzt die Form annehmen:

$\varphi_1 + p = \pm \delta + z + q \sin z$ bei oberen Culminationen
und

$\varphi_1 + p = 180^\circ - \delta_1 - z_1 - q \sin z_1$ bei unteren Culminationen,
welche man besser gleich auf die übliche Form bringt

$$0 = ((\pm \delta + z) - \varphi_1) - p + q \sin z \text{ und}$$

$$0 = ((180^\circ - \delta_1 - z_1) - \varphi_1) - p - q \sin z_1.$$

Da hier die Werthe $\pm \delta + z$ und $180 - \delta_1 - z_1$ diejenigen Werthe der Breite bedeuten, welche unmittelbar aus den beobachteten und für Refraction verbesserten Zenithdistanzen und den Declinationen der betreffenden Gestirne hervorgehen, so könnte man sie kurzweg mit Φ bezeichnen und hätte dann als allgemeine Form die Bedingungsgleichung

für obere Culminationen $0 = \Phi - \varphi_1 - p + q \sin z$

für untere Culminationen $0 = \Phi - \varphi_1 - p - q \sin z_1$.

Solcher Gleichungen erhält man alsdann so viele, als Gestirne zur Messung der Zenithdistanzen benutzt sind, und es handelt sich nur noch darum, vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe der Breiten-Correction p und der Durchbiegungs-Constante q zu berechnen.

43. Als Beispiel wählen wir eine Bestimmung der Breite des „alten Zolls“ bei Bonn, beruhend auf einer Reihe von Beobachtungen, welche Lundahl laut einer Dissertation (*dissertatio astronomica de altitudine poli Bonnensis*, Helsingfors 1840) dort angestellt hat. Die beobachteten Sterne waren

β Geminorum,	dessen $\delta = + 28^{\circ} 24' 23'',5$	$+ 0'',7$
α Tauri,	$\delta = + 16^{\circ} 10' 53'',9$	$+ 0'',5$
α Orionis,	$\delta = + 7^{\circ} 22' 15'',7$	$+ 0'',6$
δ Hydrae,	$\delta = + 6^{\circ} 15' 26'',0$	
β Orionis,	$\delta = - 8^{\circ} 23' 30'',2$	$+ 1'',6$
α Canis majoris,	$\delta = - 16^{\circ} 30' 6'',5$	$+ 1'',1$
δ Ursae minoris,	$\delta = + 86^{\circ} 35' 29'',71$	$+ 0'',43$
δ Draconis	$\delta = + 67^{\circ} 22' 48'',8$	
64 Draconis,	$\delta = + 64^{\circ} 22' 26'',1$	
α Cephei	$\delta = + 61^{\circ} 54' 33'',1$	$+ 1'',2$

Von ihnen sind die letztern vier in der untern Culmination beobachtet. Aus 262 einzelnen Beobachtungen sind nun folgende Werthe der Polhöhen ermittelt, denen wir gleich die Anzahl der einzelnen Beobachtungen, aus denen sie hervorgegangen, nebst den daraus folgenden Gewichten, sowie die mittleren Werthe der Polhöhen und deren Summe der Gewichte beifügen.

Gestirn.	Beobachtete Breiten.	Anzahl der Beobachtungen.	Gewicht derselben.	Mittlere Werthe der Breite oder φ .	Gewicht derselben.
β Geminorum . . .	$50^{\circ} 44' 8'',7$	4	1	$50^{\circ} 44' 8'',14$	$9\frac{1}{3}$
	10 ,5	4	1		
	9 ,7	4	1		
	8 ,0	4	1		
	10 ,2	2	$\frac{2}{3}$		
	6 ,9	4	1		
	7 ,0	4	1		
	7 ,3	6	$\frac{4}{3}$		
	6 ,5	6	$\frac{4}{3}$		
α Tauri	$50^{\circ} 44' 8'',0$	6	$\frac{4}{3}$	$50^{\circ} 44' 8'',0$	$1\frac{1}{3}$
α Orionis	$50^{\circ} 44' 8'',5$	6	$\frac{4}{3}$	$50^{\circ} 44' 8'',42$	$4\frac{1}{3}$
	9 ,2	6	$\frac{4}{3}$		
	9 ,3	4	1		
	5 ,4	2	$\frac{2}{3}$		
δ Hydrae	$50^{\circ} 44' 8'',0$	4	1	$50^{\circ} 44' 8'',92$	6
	8 ,5	4	1		
	8 ,3	4	1		
	11 ,3	4	1		
	8 ,6	4	1		
	8 ,8	4	1		

86 B. Lineäre Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Gestirn.	Beobachtete Breiten.	Anzahl der Beobachtungen.	Gewicht derselben.	Mittlere Werthe der Breite oder φ .	Gewicht derselben.
β Orionis	50° 44' 6'',9	4	1		
	6 ,3	4	1	50° 44' 6'',15	4
	5 ,7	4	1		
	5 ,7	4	1		
α Canis majoris .	50° 44' 7'',3	8	$\frac{5}{3}$		
	8 ,4	6	$\frac{4}{3}$		
	8 ,3	4	1	50° 44' 7'',70	7
	5 ,9	4	1		
	9 ,5	4	1		
	6 ,8	4	1		
δ Ursae minoris .	50° 44' 10'',2	4	1		
	10 ,4	2	$\frac{2}{3}$		
	7 ,6	4	1		
	7 ,2	4	1		
	10 ,9	4	1	50° 44' 9'',99	11 $\frac{2}{3}$
	12 ,8	4	1		
	11 ,3	8	$\frac{5}{3}$		
	8 ,3	8	$\frac{5}{3}$		
	9 ,0	6	$\frac{4}{3}$		
	12 ,2	6	$\frac{4}{3}$		
δ Draconis . . .	50° 44' 9'',4	6	$\frac{4}{3}$		
	11 ,4	6	$\frac{4}{3}$		
	9 ,0	4	1		
	11 ,4	4	1		
	12 ,3	6	$\frac{4}{3}$		
	9 ,9	4	1	50° 44' 11'',01	11
	11 ,8	4	1		
	12 ,2	4	1		
	10 ,6	4	1		
	12 ,1	4	1		
64 Draconis . . .	50° 44' 8'',4	2	$\frac{2}{3}$		
	9 ,4	4	1		
	8 ,6	4	1		
	10 ,7	4	1	50° 44' 10'',68	6 $\frac{2}{3}$
	12 ,8	4	1		
	12 ,3	4	1		
	11 ,8	4	1		
α Cephei	50° 44' 9'',8	4	1		
	11 ,7	4	1	50° 44' 10'',75	2

Summe sämmtlicher Breiten 89'',76

Genäherter Werth der Breite 50° 44' 9'' = φ ;

Man findet nun leicht die Werthe $\Phi - \varphi_1$, ferner die $\sin z$, wobei man für z nur genäherte Werthe in Rechnung zu führen nöthig hat,

bei β Geminorum,	deren $z = 22^\circ 20'$, $\sin z = 0,380$, $\Phi - \varphi_1 = - 0'',86$
„ α Tauri,	„ $z = 34^\circ 33'$, $\sin z = 0,567$, $\Phi - \varphi_1 = - 1'',00$
„ α Orionis,	„ $z = 43^\circ 22'$, $\sin z = 0,686$, $\Phi - \varphi_1 = - 0'',58$
„ δ Hydrae,	„ $z = 44^\circ 29'$, $\sin z = 0,701$, $\Phi - \varphi_1 = - 0'',08$
„ β Orionis,	„ $z = 59^\circ 7'$, $\sin z = 0,858$, $\Phi - \varphi_1 = - 2'',85$
„ α Canis majoris,	„ $z = 67^\circ 14'$, $\sin z = 0,922$, $\Phi - \varphi_1 = - 1'',30$
„ δ Ursae minoris,	„ $z_1 = 42^\circ 41'$, $\sin z_1 = 0,678$, $\Phi - \varphi_1 = + 0'',99$
„ δ Draconis,	„ $z_1 = 61^\circ 54'$, $\sin z_1 = 0,882$, $\Phi - \varphi_1 = + 2'',01$
„ 64 Draconis,	„ $z_1 = 64^\circ 54'$, $\sin z_1 = 0,905$, $\Phi - \varphi_1 = + 1'',68$
„ α Cephei,	„ $z_1 = 67^\circ 22'$, $\sin z_1 = 0,923$, $\Phi - \varphi_1 = + 1'',75$

und hat daraus die ursprünglichen Bedingungsgleichungen

1. β Geminorum . . .	$0,86 = - p + 0,380 q$	mit dem Gewicht $9\frac{1}{3}$
2. α Tauri	$1,00 = - p + 0,567 q$	„ „ „ $1\frac{1}{3}$
3. α Orionis	$0,58 = - p + 0,686 q$	„ „ „ $4\frac{1}{3}$
4. δ Hydrae	$0,08 = - p + 0,701 q$	„ „ „ 6
5. β Orionis	$2,85 = - p + 0,858 q$	„ „ „ 4
6. α Canis majoris	$1,30 = - p + 0,922 q$	„ „ „ 7
7. δ Ursae minoris	$- 0,99 = - p - 0,678 q$	„ „ „ $11\frac{2}{3}$
8. δ Draconis	$- 2,01 = - p - 0,882 q$	„ „ „ 11
9. 64 Draconis	$- 1,68 = - p - 0,905 q$	„ „ „ $6\frac{2}{3}$
10. α Cephei	$- 1,75 = - p - 0,923 q$	„ „ „ 2

Die Berechnung der Werthe $[g \cdot aM]$, $[g \cdot a^2]$, $[g \cdot ab]$, $[g \cdot bM]$, $[g \cdot b^2]$ ersieht man aus folgender Zusammenstellung

Stern.	$g \cdot aM$	$g \cdot a^2$	$g \cdot ab$	$g \cdot bM$	$g \cdot b^2$
β Gem. . .	- 8,03	9,33	- 3,550	+ 3,050	+ 1,348
α Tauri . .	- 1,33	1,33	- 0,756	+ 0,756	0,429
α Orion. . .	- 2,51	4,33	- 2,973	+ 1,724	2,039
δ Hydrae .	- 0,48	6	- 4,206	+ 0,337	2,948
β Orion. . .	- 11,40	4	- 3,432	+ 9,781	2,945
α Can. maj.	- 9,10	7	- 6,454	+ 8,390	5,951
δ Urs. min.	+ 11,55	11,67	+ 7,910	+ 7,831	5,363
δ Dracon. .	+ 22,11	11	+ 9,702	+ 19,501	8,557
64 Dracon.	+ 11,20	6,67	+ 6,033	+ 10,136	5,460
α Ceph. . .	+ 3,50	2	+ 1,846	+ 3,231	1,704
	+ 15,51	63,33	+ 4,12	+ 64,74	+ 36,74
	$= [g \cdot aM]$	$= [g \cdot a^2]$	$= [g \cdot ab]$	$[g \cdot bM]$	$[g \cdot b^2]$

88 III. Behandlung transcenderter Gleichungen.

Man hat folglich die beiden Normalgleichungen

$$15,51 = 63,33 p + 4,12 q$$

$$64,74 = 4,12 p + 36,74 q$$

und aus ihnen

$$p = 0'',131 \text{ (beiläufig mit dem wahrsch. Fehler } \pm 0'',130)$$

$$q = 1'',751 \text{ (" " " " " " } \pm 0'',171).$$

Die gesuchte Breite des Beobachtungsorts ist also

$$50^\circ 44' 9'' + 0'',131 = 50^\circ 44' 9'',13 (\pm 0'',13)$$

und die Durchbiegungs-Constante des Instruments $1'',751$, also

die Correction für Durchbiegung bei einer Zenithdistanz z

$$= + 1'',751 \cdot \sin z.$$

III. Das Verfahren bei der Behandlung von Aufgaben, welche auf transcendente Gleichungen führen.

44. Das Verfahren, welches man einzuschlagen hat, wenn die Function F in Bezug auf die Unbekannten nicht linear ist, kommt im Wesentlichen auf die schon vielfach im Vorigen empfohlene Methode der Anwendung von Näherungswerthen hinaus, welche man verbunden mit gewissen noch zu ermittelnden Correctionen statt der alten Unbekannten in die Gleichungen einführt. Man wird alsdann die erhaltenen Functionen nach dem Taylor'schen Satze für mehrere Unbekannte entwickeln, und wegen der Kleinheit der Correctionen die folgenden Potenzen weglassen können, wodurch man auf soviel lineäre Gleichungen geführt wird, als ursprüngliche Gleichungen aus den Beobachtungen sich ergaben, und aus diesen lineären Gleichungen die Correctionen auf dem vorhin sub B gezeigten Wege finden. Sollte es sich dabei zuletzt ergeben, dass die berechneten Werthe der Correctionen zu gross werden, als dass man ihre höhern Potenzen vernachlässigen dürfte, so müsste man die Rechnung mit den vermittelst der berechneten

Correctionen zu verbessernden Näherungswerthen oder überhaupt mit verbesserten Näherungswerthen wiederholen. (Vergl. darüber das letzte Beispiel am Schluss.)

Die Näherungswerthe selbst endlich erhält man immer, wenn man nicht durch Schätzung zu ihnen gelangen will, indem man soviele der gegebenen Gleichungen, als Unbekannte da sind, direct nach diesen Unbekannten löst.

Das Specielle des Verfahrens wird, um Wiederholung zu vermeiden, bei der wirklichen Lösung einer Aufgabe dieser Art am besten zu zeigen sein.

45. Aufgabe: Ermittlung der Coordinaten eines gewissen Punktes, wenn die Coordinaten und Azimuthe mehrerer anderer Punkte gegeben sind.

Es sind gegeben eine Anzahl Schnitte des Schlossthurms in Oldenburg, nämlich

	Coordinaten des Standpunkts		Azimuthe von Süd durch West <i>A</i>
	<i>a</i>	<i>b</i>	
Crapendorf	+ (Süd) 8713,80	+ (West) 3232,26 R. R.	20°21' 6"
Altenoythe	+ 3150,24	+ 6080,12	62 36 38
Westerstede	— 3547,27	+ 5113,88	124 44 50
Rastede	— 3170,50	+ 293,56	174 42 36
Golzwarden	— 6332,07	+ 4390,41	214 44 10
Berne	— 1368,10	— 4631,48	253 32 36
Bremen, Ansgariithurm	+ 1710,06	— 10446,07	279 17 49
Ganderkese	+ 3092,16	— 5875,14	297 45 30
Wildeshausen	+ 7050,85	— 3948,20	330 45 10

Gesucht sind die Coordinaten des Schlossthurms.

Die Angaben sind einer übersichtlichen Zusammenstellung der Coordinaten der einzelnen Ortschaften Oldenburgs entnommen, welche als Resultat der von 1835 bis 1837 ausgeführten Triangulierung des Herzogthums durch den Herrn Geh. Hofrath Freiherrn von Schrenck in Oldenburg veröffentlicht sind. Der Anfangspunkt des Coordinatensystems ist aber jener Schlossturm; wir werden also seine Coordinaten als = 0 erhalten müssen.

Es seien nun die gesuchten Coordinaten x, y , so sind offenbar folgende Gleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} \frac{y-b}{x-a} &= \operatorname{tang} A & \operatorname{arc tang} \frac{y-b}{x-a} &= A \\ \frac{y-b_1}{x-a_1} &= \operatorname{tang} A_1 \text{ u. s. w.} & \operatorname{arc tang} \frac{y-b_1}{x-a_1} &= A_1 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

oder

Nun wissen wir freilich hier im Voraus, dass x und y sehr kleine Grössen sein werden; um aber das Beispiel so zu rechnen, dass man die Behandlung auch anderer Aufgaben, welche vom Anfangspunkte der Coordinaten entfernt liegende Punkte betreffen, aus unserer Methode ersehen könne, nehmen wir auf jenen Umstand weiter keine Rücksicht.

46. Die erste Arbeit ist also, gute Näherungswerthe für x und y zu beschaffen; sie mögen p und q heissen und noch der Correctionen ξ und η bedürfen, um x und y gleich zu werden, d. h. wir gehen aus von den Hülfsleichungen

$$\begin{aligned} x &= p + \xi \\ y &= q + \eta \end{aligned}$$

Durch ihre Einführung in die ursprünglichen Gleichungen gehen diese über in

$$\operatorname{arc tang} \frac{q + \eta - b}{p + \xi - a} = A$$

$$\operatorname{arc tang} \frac{q + \eta - b_1}{p + \xi - a_1} = A_1$$

oder wenn man der Kürze halber

$$q - b = m$$

$$q - b_1 = m_1 \text{ u. s. w.}$$

$$\text{ferner } p - a = n$$

$$p - a_1 = n_1 \text{ setzt,}$$

$$\operatorname{arc tang} \frac{m + \eta}{n + \xi} = A$$

$$\operatorname{arc tang} \frac{m_1 + \eta}{n_1 + \xi} = A_1 \text{ u. s. w.}$$

Wenn hier η und ξ sehr kleine Grössen sind, so kann man bei der Entwicklung von $\operatorname{arc tang}$ nach dem Taylor'schen Satze alle nach dem zweiten folgenden Glieder vernachlässigen. Hat man aber eine $f(\eta, \xi)$, worin η in $\eta + h$, ξ in $\xi + k$ übergeht, so wird nach Taylor

$$f(\eta + h, \xi + k) = f(\eta, \xi) + \frac{h \cdot d f(\eta, \xi)}{d \eta} + \frac{k \cdot d f(\eta, \xi)}{d \xi} + \dots,$$

welche Gleichung für $\eta = \xi = 0$, und $h = \eta$, $k = \xi$ übergeht in

$$f(\eta, \xi) = f(0,0) + \frac{\eta \cdot d f(0,0)}{d \eta} + \frac{\xi \cdot d f(0,0)}{d \xi} + \dots,$$

also unter Vernachlässigung der folgenden Glieder

$$f(\eta, \xi) = f(0,0) + \frac{\eta \cdot d f(0,0)}{d \eta} + \frac{\xi \cdot d f(0,0)}{d \xi}.$$

Nun ist $d \cdot \text{arc tang } x = \frac{dx}{1 + x^2},$

$$\begin{aligned} \text{also hier } d \cdot \text{arc tang } \frac{m + \eta}{n + \xi} &= \frac{d \cdot \frac{m + \eta}{n + \xi}}{1 + \left(\frac{m + \eta}{n + \xi}\right)^2} \\ &= \frac{(n + \xi) d \eta - (m + \eta) d \xi}{(n + \xi)^2 + (m + \eta)^2} \\ &= \frac{(n + \xi) d \eta - (m + \eta) d \xi}{(n + \xi)^2 + (m + \eta)^2}, \\ \text{aber da } \xi \text{ und } \eta \text{ sehr klein,} &= \frac{n \cdot d \eta - m \cdot d \xi}{n^2 + m^2} \\ &= \frac{n \cdot d \eta}{n^2 + m^2} - \frac{m \cdot d \xi}{n^2 + m^2}. \end{aligned}$$

Also wird unsere Gleichung

$$\text{arc tang } \frac{m + \eta}{n + \xi} = A \quad \text{übergehen in}$$

$$\text{arc tang } \frac{m + \eta}{n + \xi} = \text{arc tang } \frac{m}{n} + \frac{n}{n^2 + m^2} \eta - \frac{m}{n^2 + m^2} \xi = A$$

oder

$$\frac{n}{n^2 + m^2} \eta - \frac{m}{n^2 + m^2} \xi + \text{arc tang } \frac{m}{n} - A = 0.$$

Ebenso ferner

$$\frac{n_1}{n_1^2 + m_1^2} \eta - \frac{m_1}{n_1^2 + m_1^2} \xi + \text{arc tang } \frac{m_1}{n_1} - A_1 = 0$$

$$\frac{n_2}{n_2^2 + m_2^2} \eta - \frac{m_2}{n_2^2 + m_2^2} \xi + \text{arc tang } \frac{m_2}{n_2} - A_2 = 0 \quad \text{u. s. f.}$$

welche lineäre Gleichungen jetzt statt der früheren transcendenten zu lösen wären. Zu dem Ende hätte man wieder nach der Methode der kleinsten Quadrate jede Gleichung mit dem Coefficienten von je einer der beiden Unbekannten η und ξ zu multiplicieren und die erhaltenen Gleichungen zu addieren. Man würde dadurch auf zwei Normalgleichungen kommen von der Form

$$\alpha \eta + \beta \xi = \nu$$

$$\beta \eta + \gamma \xi = \mu,$$

welche auf gewöhnliche Art gelöst η und ξ , und durch Verbindung mit p und q auch x und y geben würden.

Soviel über die Lösung der Aufgabe im Allgemeinen.

47. Obiges Zahlenbeispiel angehend, so wäre die nächste Arbeit die Ermittlung der Näherungswerthe p und q , dann der Factoren $\frac{n}{n^2 + m^2}$, $\frac{m}{n^2 + m^2}$ u. s. w., und der Constanten $\text{arc tang } \frac{m}{n}$, worauf man zur Bildung der Normalgleichungen übergehen könnte.

Zur Ermittlung der Näherungswerthe für x und y empfehlen sich die beiden Gleichungen

$$\frac{y - b_6}{x - a_6} = \text{tang } A_6$$

$$\frac{y - b_8}{x - a_8} = \text{tang } A_8,$$

da Bremen und Wildeshausen Dreiecken erster Ordnung angehören.

Aus ihnen folgt

$$y - b_6 = x \text{ tang } A_6 - a_6 \text{ tang } A_6$$

$$y - b_8 = x \text{ tang } A_8 - a_8 \text{ tang } A_8$$

$$b_8 - b_6 = x (\text{tang } A_6 - \text{tang } A_8) + a_8 \text{ tang } A_8 - a_6 \text{ tang } A_6.$$

Daraus $x = + 0,022 = p$ (wie oben bezeichnet wurde)

und $y = + 0,002 = q$ („ „ „ „).

Dass die Näherungswerthe hier so klein ausfallen, hat seinen Grund bekanntlich darin, dass oben schon die Erwartung ausgesprochen wurde, es würden die wahren Werthe von x und $y = 0$ werden.

Die Berechnungsweise der Factoren $\frac{n}{n^2 + m^2}$, $\frac{m}{n^2 + m^2}$ und der $\text{arc tang } \frac{m}{n}$, welche letztere natürlich nicht im Winkel- sondern im Bogenmaass auszudrücken sind, ersieht man aus folgender Zusammenstellung.

	Crapendorf.	Altenoythe.	Westerstede.	Rastede.	Golzwarden.	Berne.	Bremen.	Ganderkese.	Wildeshausen.
m	— 3232,258	— 6080,118	— 5113,878	— 293,558	— 4390,408	+ 4631,482	+ 10 446,072	+ 5875,142	+ 3948,202
n	— 8713,778	— 3150,218	+ 3547,292	+ 3170,522	+ 6332,092	+ 1368,122	— 1 710,038	— 3092,138	— 7050,828
$\log m$	3,509 5061	3,783 9120	3,708 7504	2,467 6939	3,642 5049	3,665 7200	4,018 9530	3,769 0184	3,596 3993
$\log n$	3,940 2065	3,498 3406	3,549 8969	3,501 1308	3,801 5471	3,136 1248	3,233 0057	3,490 2588	3,848 2401
$\log \frac{m}{n} = \log \tan g$	9,569 2996	0,285 5714	0,158 8535	8,966 5631	9,840 9578	0,529 5952	0,785 9473	0,278 7596	9,748 1592
$arc.$	$20^{\circ} 21' 5''$,963	$62^{\circ} 36' 37''$,847	$124^{\circ} 44' 50''$,956	$174^{\circ} 42' 36''$,280	$214^{\circ} 44' 8''$,986	$253^{\circ} 32' 35''$,019	$279^{\circ} 17' 49''$,006	$297^{\circ} 45' 29''$,575	$330^{\circ} 45' 10''$,061
$\log m^2$	7,019 0122	7,567 8240	7,417 5008	4,935 3878	7,285 0098	7,331 4400	8,037 9060	7,538 0368	7,192 7986
$\log n^2$	7,880 4130	6,996 6812	7,099 7938	7,002 2616	7,603 0942	6,272 2496	6,466 0114	6,980 5176	7,696 4802
m^2	1044 7497	3696 7834	2615 1754	8 6176	1927 5680	2145 0624	10912 0403	3451 7300	1558 8293
n^2	7592 9935	992 3872	1258 3278	1005 2212	4009 5365	187 1758	292 4229	956 1314	4971 4170
$m^2 + n^2$	8637 7432	4689 1706	3873 5032	1013 8388	5937 1045	2332 2382	11204 4632	4407 8614	6530 2463
$\log (m^2 + n^2)$	7,936 4002	7,671 0960	7,588 1039	7,005 9689	7,773 5747	7,367 7729	8,049 3910	7,644 2279	7,814 9295
$\log \frac{n}{m^2 + n^2}$	$\frac{6,003 8063}{-}$	$\frac{5,827 2446}{-}$	$\frac{5,961 7930}{+}$	$\frac{6,495 1619}{+}$	$\frac{6,027 9724}{+}$	$\frac{5,768 3519}{+}$	$\frac{5,183 6147}{-}$	$\frac{5,846 0309}{-}$	$\frac{6,033 3106}{-}$
$\log \frac{m}{m^2 + n^2}$	$\frac{5,573 1059}{-}$	$\frac{6,112 8160}{-}$	$\frac{6,120 6465}{-}$	$\frac{5,461 7250}{-}$	$\frac{5,868 9302}{-}$	$\frac{6,297 9471}{+}$	$\frac{5,969 5620}{+}$	$\frac{6,124 7905}{+}$	$\frac{5,781 4698}{+}$
$arc \tan g \frac{m}{n} - A$	— 0'',037	— 0'',153	+ 0'',956	+ 0'',280	— 1'',014	— 0'',981	+ 0'',006	— 0'',425	+ 0'',061
dessen $\log$	0,568 2017 — 2	0,184 6914 — 1	0,980 4579 — 1	0,447 1580 — 1	0,006 0380	0,991 6690 — 1	0,778 1513 — 3	0,628 3889 — 1	0,785 3298 — 2
$\log arc = Rad$	5,314 4251	5,314 4251	...	...	...	...	...	...	...
$\log arc tg \frac{m}{n} - A$									
im Bogenmaass	3,253 7766	3,870 2663	4,666 0328	4,132 7329	4,691 6129	4,677 2439	2,463 7262	4,313 9638	3,470 9047

Da zur später vorzunehmenden Bildung der Normalgleichungen wieder Logarithmen gebraucht werden, so empfiehlt es sich in den ursprünglichen Gleichungen nicht die Factoren $\frac{n}{n^2 + m^2}$ u. s. w. selbst auszurechnen, sondern mit ihren Logarithmen sich zu genügen. Man müsste dann freilich überall fortan *num.log* schreiben, wenn man die Factoren selbst meint, kann indessen zur Abkürzung bloss die Logarithmen selbst setzen. Um sodann die negativen Logarithmen zu vermeiden, ist es zweckmässig, sich die ursprünglichen Gleichungen mit 100 000 000 multipliciert, d. h. zu den Logarithmen der Factoren und Constanten 8 Einheiten addiert zu denken, wodurch man überall positive Logarithmen resp. ganze Zahlen erhält. Endlich ist natürlich Rücksicht auf die Vorzeichen der $\frac{n}{n^2 + m^2}$, $\frac{m}{n^2 + m^2}$ u. s. w. zu nehmen, welche bloss von dem Zähler der Brüche abhängig sind, und zu bedenken, dass das zweite Glied im Allgemeinen negativ war. Man hat dann statt der allgemeinen Gleichungen

$$\frac{n}{n^2 + m^2} \eta - \frac{m}{n^2 + m^2} \xi + \text{arc tang } \frac{m}{n} - A = 0 \text{ u. s. w.}$$

jetzt im Zahlenbeispiel die Gleichungen

$$\begin{aligned} & - 4,003\,8063\,\eta + 3,573\,1059\,\xi - 1,253\,7766 = 0 \\ & - 3,827\,2446\,\eta + 4,112\,8160\,\xi - 1,870\,2663 = 0 \\ & + 3,961\,7930\,\eta + 4,120\,6465\,\xi + 2,666\,0328 = 0 \\ & + 4,495\,1619\,\eta + 3,461\,7250\,\xi + 2,132\,7329 = 0 \\ & + 4,027\,9724\,\eta + 3,868\,9302\,\xi - 2,691\,6129 = 0 \\ & + 3,768\,3519\,\eta - 4,297\,9471\,\xi - 2,677\,2439 = 0 \\ & - 3,183\,6147\,\eta - 3,969\,5620\,\xi + 0,463\,7262 = 0 \\ & - 3,846\,0309\,\eta - 4,124\,7905\,\xi - 2,313\,9638 = 0 \\ & - 4,033\,3106\,\eta - 3,781\,4698\,\xi + 1,470\,9047 = 0, \end{aligned}$$

wo überall *num log* statt des geschriebenen *log* zu lesen ist. Zur Bildung der Normalgleichungen addiere man nun überall den *log* je einer Unbekannten z. B. η zu sich und den beiden übrigen Logarithmen, schlage dann überall die zugehörigen Zahlen auf, und addiere sämtliche Gleichungen, wie folgt:

8,007 6126 η	—	7,576 9122 ξ	=	—	5,257 5829	oder	1 0176 8305 η	—	3774 9578 ξ	=	—	18 0960
7,654 4892 η	—	7,940 0606 ξ	=	—	5,697 5109	"	4513 2472 η	—	8710 8520 ξ	=	—	49 8323
7,923 5860 η	+	8,082 4395 ξ	=	—	6,627 8258	"	8386 6020 η	+	1 2090 3670 ξ	=	—	424 4492
8,990 3238 η	+	7,956 8869 ξ	=	—	6,627 8948	"	97796 6222 η	+	905 4966 ξ	=	—	424 5167
8,055 9448 η	+	7,896 9026 ξ	=	+	6,719 5853	"	1 1374 8260 η	+	7886 8320 ξ	=	+	524 3065
7,536 7038 η	—	8,066 2990 ξ	=	+	6,445 5958	"	3441 1516 η	—	1 1649 0105 ξ	=	+	278 9946
6,367 2294 η	+	7,153 1767 ξ	=	+	3,647 3409	"	232 9322 η	+	1422 9075 ξ	=	+	4440
7,692 0618 η	+	7,970 8214 ξ	=	—	6,159 9947	"	4921 0944 η	+	9350 2100 ξ	=	—	144 5422
8,066 6212 η	+	7,814 7804 ξ	=	+	5,504 2153	"	1 1657 9214 η	+	6528 0046 ξ	=	+	31 9312
Daraus 1)						15 2501 2275 η	+	1 4048 9974 ξ	=	—	225 7601	

Wegen der zweiten Normalgleichung ist nur noch auf den Factor von ξ und die Constante zu achten:

..... +	7,146 2118 ξ	=	+	4,826 8825	oder	 +	1400 2700 ξ	=	+	6 7125
	8,225 6320 ξ	=	+	5,983 0823	"		16812 4893 ξ	=	+	96 1795
	8,241 2930 ξ	=	—	6,786 6793	"		1 7429 8240 ξ	=	—	611 8981
	6,923 4500 ξ	=	—	5,594 4579	"		838 3976 ξ	=	—	39 3059
	7,737 8604 ξ	=	+	6,560 5431	"		5468 4012 ξ	=	+	363 5323
	8,595 8942 ξ	=	—	6,975 1910	"		39436 1182 ξ	=	—	944 4760
	7,939 1240 ξ	=	+	4,433 2882	"		8692 0882 ξ	=	+	2 7120
	8,249 5810 ξ	=	—	6,438 7543	"		1 7765 6450 ξ	=	—	274 6340
	7,562 9396 ξ	=	+	5,252 3745	"		3655 4392 ξ	=	+	17 8803
Daraus 2) 1 4048 9974 η + 11 1498 6727 ξ = — 1383 2974										

Aus diesen beiden Normalgleichungen findet man sodann durch einfache Elimination, die mit Hülfe von Logarithmen sich leicht bewerkstelligen lässt,

$$\begin{aligned}\xi &= -0,0124\,4940 \\ \eta &= -0,0003\,4142 \\ \text{mithin } x &= 0,022 - 0,012 = 0,010 \\ y &= 0,002 - 0,000 = 0,002.\end{aligned}$$

Die Resultate sind also nahezu Null, wie erwartet wurde. Die geringe Abweichung wird zunächst darin ihren Grund haben können, dass die Decimalen der Winkel sich in den veröffentlichten Mittheilungen nicht finden.

Anm. Wir haben die Rechnung absichtlich mit soviel Decimalen geführt, um den Anfänger, wenn er dieselben nachrechnet, zu veranlassen, sie mit weniger Stellen zu führen, und sein Urtheil zu üben, wie viel Stellen entbehrlich waren.

48. Das Pothenot'sche Problem, mit nicht orientiertem Azimuth.

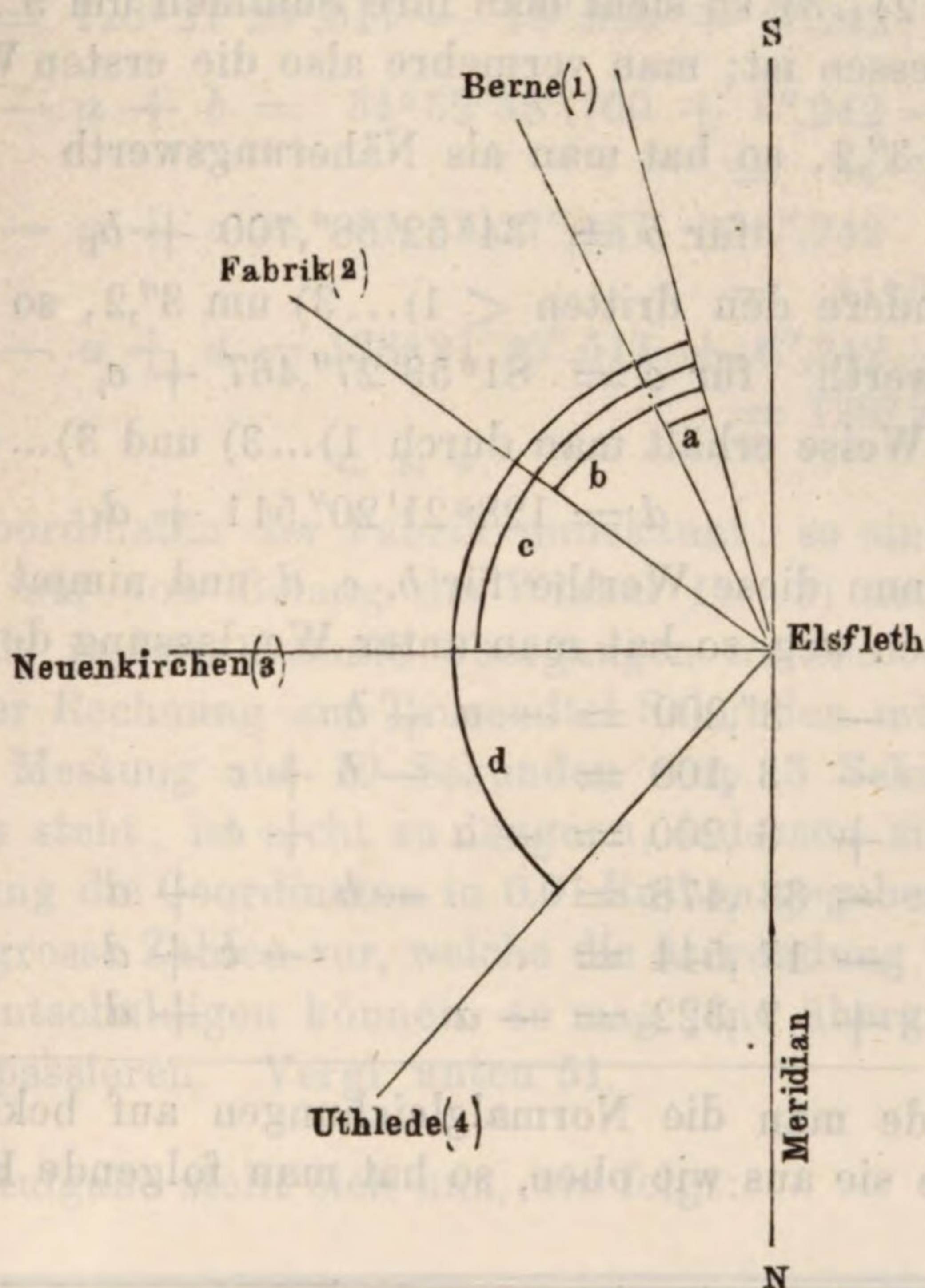
Ein einfacheres Beispiel entnehme ich vorab einigen vorigen Sommer hier am Orte angestellten Messungen, als ich die Lage eines Punktes bestimmen wollte, wo vielleicht ein Gebäude für die Oldenb. Navigationsschule gebaut werden könnte. Der Punkt sollte dann der Aufstellungsort des Passageninstruments werden und seine Lage sollte zunächst geodätisch durch seine Coordinaten vom Schlossthurme und durch das Azimuth von einem benachbarten Kirchthurme, z. B. von Berne, bestimmt werden. Die eigenen Messungen sind arithmetische Mittel aus einer Reihe von Beobachtungen, welche mit einem Pistor'schen Patentsextanten, No. 328, 10" Ablesung gestattend, angestellt sind; die eingeschnittenen Punkte sind

Berne, dessen geodätische Coordinaten		von Oldenburg gegeben sind, ...	
		Abscisse	$a=1368,10$ Nord
		Ordinate	$b=4631,48$ Ost
Neuenkirchen		$a=2878,33$	N.
		$b=5277,75$	O.
Uthlede		$a=5053,42$	N.
		$b=6352,81$	O.

Berne ist ein oldenburgischer Dreieckspunkt zweiter Ordnung, Neuenkirchen, Uthlede sind hannoversche Dreieckspunkte dritter Ordnung. Das Azimuth von Berne ist nicht orientiert;

Problem der drei Punkte mit nicht orientiertem Azimuth. 97

es werde vorab zu 18° angenommen, d. h. $S\ 18^\circ$ Ost; um sodann die Azimuthe von N. und U. zu erhalten, ist noch ein zwischen Berne und Neuenkirchen belegener Fabrikschornstein benutzt, und der westliche Schornsteinrand in die Winkelmessung hineingezogen. Gemessen ist nun, conf. folgende Skizze,



$\angle$	1)...2)	$34^\circ 52' 55'',500 = -a + b$
$\angle$	2)...3)	$47^\circ 0' 25'',667 = -b + c$
$\angle$	1)...3)	$81^\circ 53' 30'',667 = -a + c$
$\angle$	2)...4)	$93^\circ 27' 48'',333 = -b + d$
$\angle$	3)...4)	$46^\circ 27' 35'',500 = -c + d$
$\angle$	1)...4)	$128^\circ 21' 27'',833 = -a + d$

welche Messungen zuvörderst unter einander auszugleichen wären. Vergl. 28.

49. Unter $\angle a$ hat man sich einen beliebigen fingierten Winkel vorzustellen, den wir nur einführen wegen der mehrgenannten Controle und Leichtigkeit der Auswerthung der der

Wahrheit am nächsten kommenden Grössen der Winkel

$$1) \dots 2) = b (-a)$$

$$1) \dots 3) = c (-a)$$

$$1) \dots 4) = d (-a)$$

Um zunächst Näherungswerthe zu erhalten, summiere man 1)..2) und 2)..3), so sieht man ihre Summen um $9'',5$ kleiner als 1)..3) gemessen ist; man vermehre also die ersten Winkel 1)..2) um $\frac{9'',5}{3} = 3'',2$, so hat man als Näherungswerth

$$\text{für } b = 34^\circ 52' 58'',700 + b_1$$

und vermindere den dritten $< 1) \dots 3)$ um $3'',2$, so hat man als Näherungswerth für $c = 81^\circ 53' 27'',467 + c_1$

Aehnlicher Weise erhält man durch 1)...3) und 3)...4) verglichen mit 1)...4)

$$d = 128^\circ 21' 20'',511 + d_1$$

Setzt man nun diese Werthe für b, c, d und nimmt Gleiches auf beiden Seiten weg, so hat man unter Weglassung der Accente

$$\begin{array}{rcl} - & 3'',200 & = -a + b \\ - & 3,100 & = -b + c \\ + & 3,200 & = -a + c \\ - & 33,478 & = -b + d \\ - & 17,544 & = -c + d \\ + & 7,322 & = -a + d \end{array}$$

Daraus bilde man die Normalgleichungen auf bekannte Weise, und werthe sie aus wie oben, so hat man folgende Rechnung:

Normalgleichungen.					$d - 14566$	$a - 7296$	$b + 3838$
$0 =$	$3a -$	$b -$	$c -$	$d + 7,322$	$+ 21888$	0	$- 3838$
$0 =$	$-a +$	$3b -$	$c -$	$d - 33,378$	$- 18812$	$- 11516$	$- 2$
$0 =$	$-a -$	$b +$	$3c -$	$d - 17,644$	$- 3078$	$+ 4218$	$+ 380$
$0 =$	$-a -$	$b -$	$c +$	$3d + 43,700$	$+ 2$	$+ 7298$	$+ 3460$

$a + 1279$	$d - 727$	$a - 242$	$b + 104$	$d - 46$	$a + 19$	$b - 9$	$d + 3$	$a - 2$
$- 1$	$+ 726$	0	$- 104$	$- 58$	$- 1$	$+ 8$	$+ 5$	$- 1$
$- 1281$	$- 554$	$- 312$	0	$+ 46$	$+ 27$	0	$- 3$	$- 1$
$- 899$	$- 172$	$+ 70$	$- 34$	$+ 12$	$- 7$	$+ 2$	$- 1$	$+ 1$
$+ 2181$	0	$+ 242$	$+ 138$	0	$- 19$	$- 10$	$- 1$	$+ 1$

Problem der drei Punkte mit nicht orientiertem Azimuth. 99

Also hat man $\Sigma (a) = - 6,242$, $\Sigma (b) = + 3,933$, $\Sigma (d) = - 15,336$ die Correctionen der Näherungswerthe enthaltend, oder man hat

$$\begin{aligned} b &= 34^{\circ} 52' 58'',700 + 3'',933 + 6'',242 \\ c &= 81^{\circ} 53' 27'',467 + 0 + 6'',242 \\ d &= 128^{\circ} 21' 20'',511 - 15'',336 + 6'',242, \text{ also} \end{aligned}$$

$$< 1) \dots 2) = - a + b = 34^{\circ} 52' 58'',700 + 6'',242 + 3'',933 = 34^{\circ} 53' 8'',875$$

$$< 1) \dots 3) = - a + c = 81^{\circ} 53' 27'',467 + 6'',242 = 81^{\circ} 53' 33'',709$$

$$< 1) \dots 4) = - a + d = 128^{\circ} 21' 20'',511 + 6'',242 - 15'',336 = 128^{\circ} 21' 11'',417$$

u. s. w.

Da die Coordinaten der Fabrik unbekannt, so sind für den weitem Zweck nur von Belang die Winkel 1)...3) und 1)...4), und können die andern deshalb übergangen werden. Dass die Genauigkeit der Rechnung auf Tausendtel Sekunden mit der Genauigkeit der Messung auf 10 Sekunden resp. 3 Sekunden im Missverhältniss steht, ist nicht zu läugnen, indessen sind in der fernern Rechnung die Coordinaten in 0,01 Ruthen gegeben, ausserdem kommen grosse Zahlen vor, welche die Anwendung 7stelliger Logarithmen entschuldigen können: so mag jene übergrosse Genauigkeit mit passieren. Vergl. unten 51.

50. Die Aufgabe stellt sich nun, wie folgt:

Ort.	Nicht orientiertes Azimuth.		Abscisse.		Ordinate.	
Berne	A	S 18° Ost	a	= 1368,10 N.	b	= 4631,48 O.
Neuenkirchen .	A ₁	S 99° 53' 33'',709 Ost	a ₁	= 2878,33 N.	b ₁	= 5277,75 O.
Uthlede	A ₂	S 146° 21' 11'',417 Ost	a ₂	= 5053,42 N.	b ₂	= 6352,81 O.

Gefragt ist das genaue Azimuth von Berne und die Coordinaten x, y des Punktes, von dem aus die Winkel Berne-Neuenkirchen und Berne-Uthlede eingeschnitten sind.

Die Correction des Azimuths von Berne sei z , so hat man sofort die Gleichungen

$$\frac{b-y}{x-a} = \operatorname{tang} (A + z)$$

$$\frac{b_1-y}{x-a_1} = \operatorname{tang} (A_1 + z)$$

$$\frac{b_2-y}{x-a_2} = \operatorname{tang} (A_2 + z)$$

statt welcher man alsbald setzen darf, indem man sich unter u , u_1 , u_2 einen beliebigen Werth denkt,

$$b - y = u \cdot \sin (A + z)$$

$$x - a = u \cdot \cos (A + z)$$

$$b_1 - y = u_1 \cdot \sin (A_1 + z)$$

$$x - a_1 = u_1 \cdot \cos (A_1 + z)$$

$$b_2 - y = u_2 \cdot \sin (A_2 + z)$$

$$x - a_2 = u_2 \cdot \cos (A_2 + z). \quad \text{Eliminiere } x, y,$$

also $b - b_1 = u \cdot \sin (A + z) - u_1 \cdot \sin (A_1 + z)$

$$a_1 - a = u \cdot \cos (A + z) - u_1 \cdot \cos (A_1 + z)$$

$$b - b_2 = u \cdot \sin (A + z) - u_2 \cdot \sin (A_2 + z)$$

$$a_2 - a = u \cdot \sin (A + z) - u_2 \cdot \sin (A_2 + z).$$

Daraus hat man leicht

$$\frac{(b - b_1) \cos (A_1 + z) - (a_1 - a) \sin (A_1 + z)}{(b - b_2) \cos (A_2 + z) - (a_2 - a) \sin (A_2 + z)} = \frac{\sin (A - A_1)}{\sin (A - A_2)},$$

in welcher Gleichung die u , u_1 , u_2 schon wieder eliminiert sind, und nur noch eine Unbekannte z sich findet. Um sie zu finden, setze

$$(b - b_1)^2 + (a_1 - a)^2 = m^2, \quad (b - b_2)^2 + (a_2 - a)^2 = m_1^2,$$

ferner $\frac{b - b_1}{m} = \sin \varphi,$

$$\frac{b - b_2}{m_1} = \sin \varphi_1,$$

$$\frac{a_1 - a}{m} = \cos \varphi,$$

$$\frac{a_2 - a}{m_1} = \cos \varphi_1,$$

so geht obige Gleichung über in

$$\frac{m \sin \varphi \cos (A_1 + z) - m \cos \varphi \sin (A_1 + z)}{m_1 \sin \varphi_1 \cos (A_2 + z) - m_1 \cos \varphi_1 \sin (A_2 + z)} = \frac{\sin (A - A_1)}{\sin (A - A_2)}$$

oder
$$\frac{\sin ((A_1 + z) - \varphi)}{\sin ((A_2 + z) - \varphi_1)} = \frac{m_1 \sin (A - A_1)}{m \sin (A - A_2)} = \operatorname{tang} \vartheta,$$

ferner
$$\frac{\sin (A_2 + z - \varphi_1) - \sin (A_1 + z - \varphi)}{\sin (A_2 + z - \varphi_1) + \sin (A_1 + z - \varphi)} = \frac{1 - \operatorname{tang} \vartheta}{1 + \operatorname{tang} \vartheta} = \operatorname{tang} (45^\circ - \vartheta)$$

$$\cot \frac{A_2 + A_1 + 2z - (\varphi_1 + \varphi)}{2} \operatorname{tang} \frac{A_2 - A_1 + \varphi - \varphi_1}{2} = \operatorname{tang} (45^\circ - \vartheta),$$

oder endlich

$$\operatorname{tang}\left(z + \frac{A_2 + A_1 - (\varphi + \varphi_1)}{2}\right) = \cot(45^\circ - \vartheta) \cdot \operatorname{tang} \frac{A_2 - A_1 + \varphi - \varphi_1}{2}.$$

Daraus ist z zu finden.

Man findet nach einander $m^2 = 269\,8459,57$

$$\log m = 3,215\,5580$$

$$\varphi = 336^\circ 49' 57'',154, \text{ weil der}$$

Sinus negativ wird durch $b - b_1$, ferner der Cosinus positiv ist,

$$m_1^2 = 1654\,4557,5$$

$$\log m_1 = 3,609\,3276$$

$$\varphi_1 = 334^\circ 57' 49'',615.$$

Sodann, weil Zähler und Nenner beide negativ, also Winkel *per tang.* im dritten Quadranten

$$\vartheta = 252^\circ 15' 37'',092$$

$$45^\circ - \vartheta = -207^\circ 15' 37'',092. -$$

Endlich hat man

$$z = 351^\circ 13' 36'',556 \text{ oder}$$

was hier gleichbedeutend ist

$$= -8^\circ 46' 23'',444.$$

Mithin wäre das wahre Azimuth, oder

$$A + z \text{ d. h. Azimuth von Berne} = S \quad 9^\circ 13' 36'',556 \text{ Ost}$$

$$A_1 + z \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{Neuenk.} = S \quad 91^\circ 7' 10'',265 \text{ Ost}$$

$$A_2 + z \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{Uthlede} = S \quad 137^\circ 34' 47'',973 \text{ Ost.}$$

Die Correction für das Azimuth ist sehr beträchtlich ausgefallen und die Rechnung nur deshalb nicht wiederholt, weil dem Resultat wegen später eingetretener Ereignisse jeder praktische Werth abgeht. Da Berne magnetisch $S \ 8^\circ 36' \ W.$ von jenem Punkte peilt, so würde die Declination der Magnetnadel sich $= 17^\circ 54'$ ergeben, welcher Werth entschieden zu gross ist. Vergl. weiter unten No. 51.

Man hätte nun schliesslich aus den beiden ersten Gleichungen leicht

$$x = 2866,453 \text{ N.}$$

$$y = 4388,080 \text{ O.}$$

als Coordinaten des Beobachtungs-Punktes.

51. Es sei hier noch ein ähnliches Beispiel eingeschaltet, bis wir dazu übergehen, die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf Aufgaben solcher Art zu zeigen. Es diene zugleich als Beweis, dass 5stellige Logarithmen in Fällen dieser Art hinreichende Genauigkeit gewähren, also bei der unverhältnissmässig grössern Bequemlichkeit der Rechnung entschieden vorzuziehen sind.

Der Standpunkt ist der Flaggenpfahl an der Kaje zu Els-fleth. Mit demselben Pistor'schen Sextanten, dessen Indexfehler vor der Messung durch dreimalige Messung des Sonnenhalbmessers zu $-46''$ bestimmt wurde, sind gemessen die Winkel

- | | | |
|----------------------------|----------------------|---|
| 2) Uthlede-Neuenkirchen | $49^{\circ}17'33''$ | } Jeder Winkel durch 8ma-
lige Ablesung vom Doppel-
nonius. |
| 3) Uthlede-Berne | $129^{\circ}23'16''$ | |
| 1) Neuenkirchen-Berne . | $80^{\circ}6'27''$ | |

Nach geschehener Messung war der Indexfehler, wahrschein-lich auch durch Temperatureinflüsse veranlasst, auf $-42''$ ge-sunken, weshalb ein mittlerer Fehler von $-44''$ in Rechnung zu bringen wäre. Man hat dann die Winkel

Berne-Neuenkirchen . $80^{\circ}5'43''$

Neuenkirchen-Uthlede $49^{\circ}16'49''$

Berne-Uthlede $129^{\circ}22'32''$.

Um einen bessern Werth für das Azimuth von Berne zu er-halten, sei es jetzt zu $S\ 10^{\circ}$ Ost angenommen. Dann wird die Aufgabe folgende:

Punkte.	Nicht orientiertes Azimuth.	Abscisse.	Ordinate.
Berne	$A = 10^{\circ}$	$a = 1368,10$	$b = 4631,48$
Neuenkirchen . .	$A_1 = 90^{\circ}5'43''$	$a_1 = 2878,33$	$b_1 = 5277,75$
Uthlede	$A_2 = 139^{\circ}22'31''$	$a_2 = 5033,42$	$b_2 = 6352,81$

Die Berechnung der Hülfsleichungen, des z , endlich der Coordinaten des Beobachtungspunktes ist in folgender Rechnung enthalten:

$b - b_1 = -646,27 \dots \log = 2,81042$	$b - b_2 = -1721,33 \dots \log = 3,23586$
$a_1 - a = 1510,23 \dots \log = 3,17905$	$a_2 - a = 3685,32 \dots \log = 3,56648$
$\angle = 23^{\circ}10'3'',4 \log \tan g 9,63137$	$\angle = 25^{\circ}2'9'',1 \log \tan g 9,66938$
$\varphi = 336^{\circ}49'56'',6$	$\varphi_1 = 334^{\circ}57'50'',9$
$2 \log (b - b_1) = 5,62084 \dots \text{Zahl } 417680$	$2 \log (b - b_2) = 6,47172 \text{ Zahl } 2962867$
$2 \log (a_1 - a) = 6,35810 \dots \text{,, } 2280890$	$2 \log (a_2 - a) = 7,13296 \dots \text{,, } 13581900$
$\log = 6,43113 \text{ Zahl } m^2 = 2698570$	$\log = 7,21865 \dots \text{Zahl } m_1^2 = 16544767$
$\frac{1}{2} \log = 3,21557 = \log m.$	$\frac{1}{2} \log = 3,60933 = \log m_1.$

Dazu $A - A_1 = -80^{\circ}5'43'' \log \sin = 9,99347 n$

$\text{colog } m = 6,78443$

$A - A_2 = -129^{\circ}22'31'' \log \text{cosec } 0,11182 n$

$\angle = 72^{\circ}24'56'',4 \log \tan g 0,49905, +, \text{ Winkel } \vartheta$
im dritten Quadranten $\vartheta = 252^{\circ}24'56'',4$
 $45 - \vartheta = -207^{\circ}24'56'',4.$

$$\begin{array}{rcl}
 A_2 + A_1 = & 229^\circ 28' 14'' & A_2 - A_1 = 49^\circ 16' 48'' \\
 \varphi + \varphi_1 = & 671^\circ 47' 47'',5 & \varphi - \varphi_1 = 1^\circ 52' 5'',7 \\
 \hline
 u = & -442^\circ 19' 26'',5 & s = 51^\circ 8' 53'',7 \\
 u/2 = & -221^\circ 9' 43'',3 & s/2 = 25^\circ 34' 26'',9 \log \tan 9,67994 \\
 & & 45 - \vartheta = -207^\circ 24' 56'',4 \log \cot 0,28509n \\
 & & < = 42^\circ 41' 43'',8 \log \tan 9,96503n \\
 \text{weil negativ im zweiten Quadranten} & & = 137^\circ 18' 16'',2.
 \end{array}$$

Man hat also

$$z - 221^\circ 9' 43'',3 = 137^\circ 18' 16'',2$$

$$z = 358^\circ 27' 59'',5$$

oder was hier gleichbedeutend ist

$$z = -1^\circ 32' 0'',5.$$

Also ist das wahre Azimuth von Berne, d. h. $A + z = S \ 8^\circ 27' 59'',5$ Ost
 von Neuenk. „ $A_1 + z = S \ 88^\circ 33' 42'',5$ Ost
 von Uthlede „ $A_2 + z = S \ 137^\circ 50' 30'',5$ Ost.

Anm. Mit dem jetzt gefundenen Werthe für das Azimuth von Berne ergeben magnetische Azimuth-Beobachtungen von im Mittel $S \ 8^\circ 30' W.$ eine westliche Declination der Nadel von $16^\circ 58'$, welches sehr gut zu sonstigen Wahrnehmungen stimmt. Vergl. auch Müller kosmische Physik, Seite 481.

Preussische Marineoffiziere fanden in demselben Jahre 1857

Juli 3 für Wangerooge ($53^\circ 47' N., 7^\circ 54' O.$ v. Greenwich) Missweisung = $17^\circ 46' W.$

Juli 13 für Bremerhafen ($53^\circ 32' N., 8^\circ 35' Ost$) Missweisung = $17^\circ 7' W.$

Dazu für Elsfleth ($53^\circ 14' N., 8^\circ 28' Ost$) Missweisung = $16^\circ 58' W.$

Man hat jetzt

$$x = \frac{b - b_1 + a \tan (A + z) - a_1 \tan (A_1 + z)}{\tan (A + z) - \tan (A_1 + z)} \quad 1)$$

und zur Controle auch

$$= \frac{b - b_2 + a \tan (A + z) - a_2 \tan (A_2 + z)}{\tan (A + z) - \tan (A_2 + z)} \quad 2)$$

$$= \frac{b_1 - b_2 + a_1 \tan (A_1 + z) - a_2 \tan (A_2 + z)}{\tan (A_1 + z) - \tan (A_2 + z)} \quad 3)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 A + z = 8^\circ 27' 59'',5 \log \tan 9,17276 \text{ Zahl } 0,14884 \\
 a = 1368,10 \log 3,13612 \\
 \hline
 \text{Zahl} = 203,648 \log 2,30888 \\
 A_1 + z = 88^\circ 33' 42'',5 \log \tan 1,60022 \text{ Zahl } 39,83091 \\
 a_1 = 2878,33 \log 3,45914 \\
 \hline
 \text{Zahl} = 114647,37 \log 5,05936 \\
 A_2 + z = 137^\circ 50' 30'',5 \log \tan 9,95685n \text{ Zahl } 0,90542n \\
 a_2 = 5053,42 \log 3,70359 \\
 \hline
 \text{Zahl} = 4575,50 \log 3,66044.
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 u = -39,68207 \text{ für 1) } \\
 u = +1,05426 \text{ für 2) } \\
 u = +40,73633 \text{ für 3) }
 \end{array}$$

Also x aus 1)

$$\begin{array}{rcl}
 b - b_1 & = & - \quad 646,27 \\
 + a \cdot \text{tang } A + z & = & + \quad 203,648 \\
 - a_1 \text{ tang } A_1 + z & = & - 114647,37 \\
 \hline
 & & - 115090... \log 5,06104 \\
 u & = & - 39,68207 \log 1,59859 \\
 \hline
 x & = & 2900,33 \log 3,46245
 \end{array}$$

 x aus 2)

$$\begin{array}{rcl}
 b - b_2 & = & - 1721,33 \\
 + a \cdot \text{tang } (A + z) & = & + 203,648 \\
 - a_2 \text{ tang } (A_2 + z) & = & + 4575,50 \\
 \hline
 & & + 3057,82 \log 3,48541 \\
 u & = & + 1,05426 \log 0,02295 \\
 \hline
 x & = & 2900,40 \log 3,46246.
 \end{array}$$

Endlich x aus 3)

$$\begin{array}{rcl}
 b - b_2 & = & - 1075,06 \\
 + a_1 \text{ tang } A_1 + z & = & + 114647,37 \\
 - a_2 \text{ tang } A_2 + z & = & + 4575,50 \\
 \hline
 & & 118147,81 \log 5,07243 \\
 u & = & 40,73633 \log 1,60998 \\
 \hline
 x & = & 2900,33 \log 3,46245.
 \end{array}$$

Will man dem Unterschied in der letzten Decimale des Logarithmen Rechnung tragen, so ist der Mittelwerth von

$$x = 2900,35$$

Man hat nun

$$\begin{array}{rcl}
 y & = & b - (x - a) \text{ tang } (A + z) & 1) \\
 & = & b_1 - (x - a_1) \text{ tang } (A_1 + z) & 2) \\
 & = & b_2 - (x - a_2) \text{ tang } (A_2 + z) & 3)
 \end{array}$$

$$x - a = 1532,25 \log 3,18533$$

$$\log \text{ tang } (A + z) = 9,17276$$

$$+ 228,08 \log 2,35809$$

$$b = 4631,48$$

$$y = 4403,40 \text{ aus 1)}$$

oder

$$x - a_2 = - 2153,07 \log 3,33305 n$$

$$\log \text{ tang } (A_2 + z) = 9,95685 n$$

$$+ 1949,41 \log 3,28990, +,$$

$$b_2 = 6352,81$$

$$y = 4403,40 \text{ aus 3)}$$

so dass also übereinstimmend

$$y = 4403,40$$

gefunden wird.

52. Das Pothenot'sche Problem, angewandt auf eine grössere Anzahl eingeschnittener Punkte, bei nicht orientiertem Azimuth.

Die vorstehenden Beobachtungen führen, wie man sieht, auf drei Gleichungen mit drei Unbekannten, und ist deshalb von einer Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate bei ihnen keine Rede. Sind aber von einem Punkte aus mehr als drei Oerter eingeschnitten, so wird man zur Ausgleichung der Fehler wieder zur Methode der kleinsten Quadrate seine Zuflucht nehmen müssen. Das einzuschlagende Verfahren etc. wird man am besten aus einem grössern Beispiele ansehen können, wozu ich die sonst gleichgültigen Data der hannoverschen Landesvermessung entnehme, die mir zufällig bekannt sind. Die eingeschnittenen Punkte mögen P, P_1 etc., ihre nicht orientierten Azimuthe A, A_1 etc., die Abscissen a, a_1 etc., die Ordinaten wieder b, b_1 etc. heissen. Gegeben ist nun

Eingeschnittene Punkte.	Nicht orientiertes Azimuth.	Abscisse a .	Ordinate b .
P	$A = 195^{\circ} 44' 43''$	$a = - 427,8$	$b = + 5813,5$
P_1	$A_1 = 224^{\circ} 58' 5''$	$a_1 = - 3497,0$	$b_1 = + 355,8$
P_2	$A_2 = 233^{\circ} 27' 44''$	$a_2 = - 3667,8$	$b_2 = - 2418,5$
P_3	$A_3 = 234^{\circ} 14' 57''$	$a_3 = - 753,3$	$b_3 = + 3357,9$
P_4	$A_4 = 246^{\circ} 27' 45''$	$a_4 = - 710,7$	$b_4 = + 500,5$
P_5	$A_5 = 248^{\circ} 35' 35''$	$a_5 = - 556,5$	$b_5 = + 127,9$
P_6	$A_6 = 269^{\circ} 59' 52''$	$a_6 = + 1986,5$	$b_6 = - 933,4$
P_7	$A_7 = 316^{\circ} 40' 29''$	$a_7 = + 7439,1$	$b_7 = + 1937,1$

Gefragt sind wiederum die wahren Azimuthe $A + z, A_1 + z$, etc. der Oerter P, P_1 etc. nebst den Coordinaten x, y des Standorts.

Als zu lösende Gleichungen ergeben sich zunächst

$$\frac{y - b}{x - a} = \text{tang } (A + z)$$
$$\frac{y - b_1}{x - a_1} = \text{tang } (A_1 + z) \text{ etc.}$$

53. Theils um ihre Form näher zu prüfen, und um im Allgemeinen den Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, welche ihre transcendente Form der Entwicklung der Unbekannten entgegenstellt, muss man erst Näherungswerthe für z, x und y suchen.

Ich wähle dazu die drei ersten Beobachtungen und erhalte so vorab ganz ähnliche Rechnung, wie sie das vorige Beispiel an die Hand gab. Es ist wiederum unter Berücksichtigung der veränderten Form der Gleichungen

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b - b_1}{a - a_1} \qquad \operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{b - b_2}{a - a_2}$$

$$m = \frac{b - b_1}{\sin \varphi} \qquad m_1 = \frac{b - b_2}{\sin \varphi_1}$$

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{m_1 \sin (A_1 - A)}{m \sin (A_2 - A)}, \text{ endlich wieder}$$

$$\operatorname{tang} \left(z + \frac{A_2 + A_1 - (\varphi + \varphi_1)}{2} \right) = \cot(45 - \vartheta) \operatorname{tang} \left(\frac{A_2 - A_1 + \varphi - \varphi_1}{2} \right)$$

Man hat jetzt $b - b_1 = + 5457,7 \quad \log 3,73701$

$a - a_1 = + 3069,2 \quad \log 3,48703$

$\varphi = 60^\circ 38' 52'' \log \operatorname{tang} 0,24998$

$\log \sin \varphi 9,94033$

$\log m = 3,79668$

φ im ersten Quadranten, weil Zähler und Nenner beide positiv.

$b - b_2 = + 8232,0 \quad \log 3,91551$

$a - a_2 = + 3240,0 \quad \log 3,51055$

$\varphi_1 = 68^\circ 30' 58'' \log \operatorname{tang} 0,40496$

$\log \sin \varphi_1 9,96873$

$\log m_1 = 3,94678$

$A_1 - A = 29^\circ 13' 22'' \log \sin 9,68860$

$\operatorname{colog} m = 6,20332$

$A_2 - A = 37^\circ 43' 1'' \log \operatorname{cosec} 0,21342$

$\vartheta = 48^\circ 25' 48'' \log \operatorname{tang} 0,05212$, ϑ im ersten Quadranten, weil Zähler und Nenner positiv.

$A_2 - A_1 = 8^\circ 29' 39''$

$\varphi - \varphi_1 = -7^\circ 52' 6''$

$s = 0^\circ 37' 33''$

$\frac{1}{2}s = 0^\circ 18' 46'',5 \log \operatorname{tang} 7,73731$

$45 - \vartheta = -3^\circ 25' 48'' \log \cot 1,22231n$

$< = 174^\circ 47' 36'',7 \log \operatorname{tang} 8,95962n$, also

$z + 164^\circ 37' 59'',5 = 174^\circ 47' 36'',7$

$z = 10^\circ 9' 37''.$

$A_2 + A_1 = 458^\circ 25' 49''$

$\varphi + \varphi_1 = 129^\circ 9' 50''$

$u = 329^\circ 15' 59''$

$u/2 = 164^\circ 37' 59'',5$

Jetzt noch
$$x = \frac{b - b_1 - a \operatorname{tang} (A + z) + a_1 \operatorname{tang} (A_1 + z)}{\operatorname{tang} (A_1 + z) - \operatorname{tang} (A + z)}$$

$$A = 195^\circ 44' 43''$$

$$A_1 = 224^\circ 58' 5''$$

$$z = 10^\circ 9' 37''$$

$$A_1 + z = 235^\circ 7' 42'' \log \operatorname{tang} 0,15685 \dots \text{Zahl } 1,4350$$

$$a_1 = -3497 \dots \log 3,54370$$

$$a_1 \operatorname{tang} (A_1 + z) = -5018,2 \log 3,70055$$

$$A + z = 205^\circ 54' 20'' \log \operatorname{tang} 9,68637 \dots \text{Zahl } 0,4857$$

$$a = -427,8 \dots \log 2,63124$$

$$a \operatorname{tang} (A + z) = -207,78 \dots \log 2,31761$$

$$\operatorname{tang} (A_1 + z) - \operatorname{tang} (A + z) = 0,9493.$$

$$x = \frac{5457,7 + 207,78 - 5018,2}{0,9493} = \frac{647,28}{0,9493}$$

$$= + 681,9.$$

Endlich $y = + 6352,5.$

Der Näherungswerth für $z = 10^\circ$ circa giebt Veranlassung zu einer wichtigen Bemerkung über die Form der oben angeführten ursprünglichen Gleichungen

$$\frac{y - b}{x - a} = \operatorname{tang} (A + z) = \frac{\sin (A + z)}{\cos (A + z)}.$$

Nämlich da der Winkel $A + z$ im dritten Quadranten liegt, also $\sin (A + z) = -$, $\cos (A + z) = -$, so muss auch $\operatorname{arc tang} (A + z) = \frac{y - b}{x - a}$ einem Bruch sein, dessen Zähler und Nenner beide negativ sind. Man schreibt also die ursprünglichen Gleichungen besser so

$$\frac{b - y}{a - x} = \operatorname{tang} (A + z)$$

$$\frac{b_1 - y}{a_1 - x} = \operatorname{tang} (A_1 + z) \text{ u. s. w.}$$

oder

$$\operatorname{arc tang} \frac{b - y}{a - x} = A + z$$

$$\operatorname{arc tang} \frac{b_1 - y}{a_1 - x} = A_1 + z \text{ u. s. w.}$$

54. Man setze nun wieder, ähnlich wie früher

$$\begin{aligned}y &= q + \eta \\x &= p + \xi \\z &= r + \Delta,\end{aligned}$$

wo also q, p, r die eben gefundenen Näherungswerthe für y, x und z bedeuten, welche noch der resp. Correctionen η, ξ, Δ bedürfen, setze ferner

$$\begin{aligned}b - y &= b - q - \eta = m - \eta \\a - x &= a - p - \xi = n - \xi,\end{aligned}$$

so hat man die Gleichungen

$$\text{arc tang } \frac{m - \eta}{n - \xi} - (A + r) - \Delta = 0$$

$$\text{arc tang } \frac{m_1 - \eta}{n_1 - \xi} - (A_1 + r) - \Delta = 0 \text{ u. s. w.}$$

Eine kleine, doch nicht zu vernachlässigende Bequemlichkeit verschafft man sich, wenn man vor der Entwicklung des *arc tang* nach Potenzen von η und ξ die m und n erst berechnet. Man erhält

$$\begin{aligned}m &= - 539,0 \text{ und } n = - 1109,7 \\m_1 &= - 5996,7 \quad „ \quad n_1 = - 4178,9 \\m_2 &= - 8771,0 \quad „ \quad n_2 = - 4349,7 \\m_3 &= - 2994,6 \quad „ \quad n_3 = - 1435,2 \\m_4 &= - 5852,0 \quad „ \quad n_4 = - 1392,6 \\m_5 &= - 6224,6 \quad „ \quad n_5 = - 1238,4 \\m_6 &= - 7285,9 \quad „ \quad n_6 = + 1304,6 \\m_7 &= - 4415,4 \quad „ \quad n_7 = + 6757,2.\end{aligned}$$

Weil nun aber hier fast alle m und n negativ werden, so thut man wohl, die unbequemen negativen Vorzeichen wegzuerwerfen und die zu lösenden Gleichungen also zu schreiben:

$$\text{arc tang } \frac{\eta + 539,0}{\xi + 1109,7} - 205^\circ 54' 20'' - \Delta = 0 \dots 1)$$

$$\text{arc tang } \frac{\eta + 5996,7}{\xi + 4178,9} - 235^\circ 7' 42'' - \Delta = 0 \dots 2)$$

$$\text{arc tang } \frac{\eta + 8771,0}{\xi + 4349,7} - 243^\circ 37' 21'' - \Delta = 0 \dots 3)$$

$$\text{arc tang } \frac{\eta + 2994,6}{\xi + 1435,2} - 244^\circ 24' 34'' - \Delta = 0 \dots 4)$$

$$\text{arc tang } \frac{\eta + 5852,0}{\xi + 1392,6} - 256^{\circ} 37' 22'' - \Delta = 0 \dots 5)$$

$$\text{arc tang } \frac{\eta + 6224,6}{\xi + 1238,4} - 258^{\circ} 45' 12'' - \Delta = 0 \dots 6)$$

$$\text{arc tang } \frac{\eta + 7285,9}{\xi - 1304,6} - 280^{\circ} 9' 29'' - \Delta = 0 \dots 7)$$

$$\text{arc tang } \frac{\eta + 4415,4}{\xi - 6757,2} - 326^{\circ} 50' 6'' - \Delta = 0 \dots 8)$$

Da nun wieder wie in dem Beispiel über die Coordinaten des Schlossthurms in Oldenburg (45)

$$\text{arctang } \frac{\eta + m}{\xi + n} = \text{arctang } \frac{m}{n} + \frac{n}{n^2 + m^2} \eta - \frac{m}{n^2 + m^2} \xi$$

wird, wenn man den *arctang* nach Taylor entwickelt, so nehmen die zu lösenden Gleichungen im Allgemeinen die Form an

$$\frac{n}{n^2 + m^2} \eta - \frac{m}{n^2 + m^2} \xi + \text{arc tang } \frac{m}{n} - (\text{Const.} - A + r) - \Delta = 0.$$

Die Berechnung der Factoren $\frac{n}{n^2 + m^2}$, $\frac{m}{n^2 + m^2}$, sowie des $\text{arc tang } \frac{m}{n} - \text{Const.}$ zeigt folgende Zusammenstellung.

	1)	2)	3)
Es waren in			
die $m =$	— 539,0	— 5996,7	— 8771,0
$\log m$	2,73159	3,77791	3,94305
$\log m^2$	5,46318	7,55582	7,88610
$m^2 =$	290520	3596 0000	7693 0000
Ferner die			
n	— 1109,7	— 4178,9	— 4349,7
$\log n$	3,04521	3,62106	3,63846
$\log n^2$	6,09042	7,24212	7,27692
$n^2 =$	123 1460	1746 3200	1892 0000
Also			
$n^2 + m^2$	152 1980	5342 3200	9585 0000
dessen $\log$	6,18241	7,72773	7,98159
$\log \frac{n}{n^2 + m^2}$	6,86280 — 10	5,89333 — 10	5,65687 — 10
$\log 206264,8$	5,31443	5,31443	u. s. w.
$\log$ Factor von η	2,17723	1,20776	0,97130
Factor von η	150,393	16,135	9,360
$\log \frac{m}{n^2 + m^2}$	6,54918 — 10	6,05018	5,96146
$\log 206264,8$	5,31443	5,31443	u. s. w.
$\log$ Factor von ξ	1,86361	1,36461	1,27589
Factor von ξ	73,048	23,153	18,875
$\log \frac{m}{n}$	9,68639 — 10	0,15685	0,30459
$= \log \tan$	25° 54' 24"	55° 7' 43"	63° 37' 21"
Da die m, m_1, m_2, m_3 etc. alle negativ, die n, n_1 , die beiden letzten im vierten Quadranten, also			
$\arctan \frac{m}{n}$	205° 54' 24"	235° 7' 43"	243° 37' 21"
$— (A + r)$	205° 54' 20"	235° 7' 42"	243° 37' 21"
Differenz	+ 4"	+ 1"	0

Die Factoren $\frac{n}{n^2 + m^2}, \frac{m}{n^2 + m^2}$ in den vorstehenden Gleichungen sind bekanntlich von Hause aus Bogenmaass, durch Multiplication mit 206264,8 sind ihre Werthe in Winkelmaass

4)	5)	6)	7)	8)
— 2994,6	— 5852,0	— 6224,6	— 7285,9	— 4415,4
3,47634	3,76730	3,79411	3,86248	3,64497
7,95268	7,53460	7,58822	7,72496	7,28994
8967 6000	3424 5900	3874 5454	5308 4000	1949 6000
— 1435,2	— 1392,6	— 1238,4	+ 1304,6	+ 6757,2
3,15691	3,14383	3,09286	3,11548	3,82976
6,31382	6,28766	6,18572	6,23096	7,65952
205 9800	193 9350	153 3600	170 2000	4565 8000
1102 7400	3618 5250	4027 9054	5478 6000	6515 4000
7,04247	7,55853	7,60508	7,73867	7,81394
6,11444 — 10	5,58530 — 10	5,48778 — 10	5,37681 — 10	6,01582 — 10
.....				
1,42887	0,89973	0,80221	0,69124	1,33025
26,845	7,938	6,342	4,912	21,392
6,43387	6,20877	6,18903	6,12381	5,83103
.....				
1,74830	1,52320	1,50346	1,43824	1,14543
56,014	33,358	31,876	27,431	13,977
0,31943	0,62347	0,70125	0,74700	9,81521
64° 23' 36"	76° 36' 50"	78° 44' 52"	79° 50' 54"	33° 9' 45"

n_2, n_3 auch bis auf n_6, n_7 , so liegen die sechs ersten Winkel im dritten,

244° 23' 36"	256° 36' 50"	258° 44' 52"	280° 9' 6"	326° 50' 15"
244° 24' 34"	256° 37' 22"	258° 45' 12"	280° 9' 29"	326° 50' 6"
— 58"	— 32"	— 20"	— 23"	+ 9"

übergeführt, weil man dann die letzterhaltenen Differenzen ohne weitere Veränderung stehen lassen kann, und man auch das Δ nicht weiter durch Division mit 206 264,8 in Bogenmaass zu verwandeln braucht.

112 III. Behandlung transcenderter Gleichungen.

55. Bei der jetzt möglichen Aufstellung der Gleichungen für η , ξ , Δ bedenke man, dass das Vorzeichen der Factoren $\frac{n}{n^2 + m^2}$, $\frac{m}{n^2 + m^2}$ von dem Vorzeichen des Zählers abhängig ist, sowie dass im Allgemeinen das zweite Glied ein negatives Vorzeichen hat. Man hat nun

$$-150,393 \eta + 73,048 \xi - \Delta + 4 = 0$$

$$-16,135 \eta + 23,153 \xi - \Delta + 1 = 0$$

$$-9,360 \eta + 18,875 \xi - \Delta + 0 = 0$$

$$-26,845 \eta + 56,014 \xi - \Delta - 58 = 0$$

$$-7,938 \eta + 33,358 \xi - \Delta - 32 = 0$$

$$-6,342 \eta + 31,876 \xi - \Delta - 20 = 0$$

$$+4,912 \eta + 27,431 \xi - \Delta - 23 = 0$$

$$+21,392 \eta + 13,977 \xi - \Delta + 9 = 0$$

Aus diesen Gleichungen findet man in bekannter Weise die Normalgleichungen

$$24272 \eta - 13114 \xi + 191 \Delta + 1400 = 0$$

$$13114 \eta - 12466 \xi - 278 \Delta - 5144 = 0$$

$$191 \eta - 278 \xi + 8 \Delta + 119 = 0$$

oder genauer

$$24272,03 \eta - 13114,09 \xi + 190,71 \Delta - 1399,71 = 0$$

$$-13114,09 \eta + 12465,70 \xi - 277,73 \Delta - 5143,56 = 0$$

$$190,71 \eta - 277,73 \xi + 8 \Delta + 119 = 0.$$

Aus ihnen erhält man durch gewöhnliche Elimination

$$\eta = 0,785$$

$$\xi = 2,165$$

$$\Delta = 41'',55,$$

so dass man bekommt

$$x = 682,652$$

$$y = 6354,625$$

$$z = 10^\circ 10' 18'',55.$$

56. Die Resultate sind nicht ganz zufriedenstellend; die grosse Correction für Δ hat die Correctionen η und ξ unerwartet gross gemacht. Nun würde man, wenn man der Ermittlung des Näherungswerths für z nicht die drei ersten Beobachtungen, sondern die nahe auf einander folgenden Beobachtungen *sub num* 3 4, 5 zu Grunde gelegt hätte — die grossen Differenzen von $58''$ und $32''$ (für $\text{arc tang } \frac{m}{n} - \text{Const.}$) machten schon das z verdächtig —

für z einen nahezu ebenso grossen Näherungswerth gefunden haben, wie dieser schliesslich erhaltene. Es erscheint demnach räthlich, die Rechnung noch einmal und zwar mit dem eben gefundenen Werth für $z = 10^{\circ}10'18''$ als Näherungswerth zu führen. Man erhält dann

$$z = 10^{\circ}10'18'' + \Delta = r + \Delta, \text{ wo } r = 10^{\circ}10'18'',$$

$$\text{ferner } x = 679,554 = p + \xi, \text{ wo } p = 679,6$$

$$y = 6351,607 = q + \eta, \text{ wo } q = 6351,6.$$

Dann wieder

$$b - y = b - q - \eta = m - \eta$$

$$a - x = a - p - \xi = n - \xi$$

gesetzt, so wird wieder

$$\text{arc tang } \frac{m - \eta}{n - \xi} - (A + r) - A = 0,$$

und bedeuten jetzt

$m = -538,1$	$n = -1107,4$	$A + r = 205^{\circ}55' 1''$
$m_1 = -5995,8$	$n_1 = -4176,6$	$A_1 + r = 235^{\circ} 8' 23''$
$m_2 = -8770,1$	$n_2 = -4347,4$	$A_2 + r = 243^{\circ}38' 2''$
$m_3 = -2993,7$	$n_3 = -1432,9$	$A_3 + r = 244^{\circ}25' 15''$
$m_4 = -5851,7$	$n_4 = -1390,3$	$A_4 + r = 256^{\circ}38' 3''$
$m_5 = -7285,0$	$n_5 = -1236,1$	$A_5 + r = 258^{\circ}45' 53''$
$m_6 = -7285,0$	$n_6 = +1306,9$	$A_6 + r = 280^{\circ}10' 10''$
$m_7 = -4414,5$	$n_7 = +6759,5$	$A_7 + r = 326^{\circ}50' 47''.$

Nach Berechnung der Factoren $\frac{n}{n^2 + m^2}$, $\frac{m}{n^2 + m^2}$ und

$\text{arc tang } \frac{m}{n}$ hat man die Gleichungen

$$-150,690 \eta + 73,226 \xi - \Delta - 7 = 0$$

$$-16,135 \eta + 23,163 \xi - \Delta - 1 = 0$$

$$-9,359 \eta + 18,880 \xi - \Delta - 4 = 0$$

$$-26,831 \eta + 56,058 \xi - \Delta + 9 = 0$$

$$-7,929 \eta + 33,369 \xi - \Delta - 1 = 0$$

$$-6,333 \eta + 31,884 \xi - \Delta + 6 = 0$$

$$+4,921 \eta + 27,431 \xi - \Delta + 3 = 0$$

$$+21,391 \eta + 13,970 \xi - \Delta + 20 = 0.$$

Daraus die Normalgleichungen

$$+24359,48 \eta - 13120,58 \xi + 190,965 \Delta + 1279,436 = 0$$

$$-13120,58 \xi + 12474,40 \xi - 277,981 \Delta + 412,885 = 0$$

$$+190,97 \eta - 277,98 \xi + 8 \Delta - 25 = 0,$$

114 III. Behandlung transcendenter Gleichungen.

woraus $\eta = -0,170$

$\xi = -0,230$

$\Delta = -0'',794,$

so dass man hat $y = 6351,377$

$x = 679,384$

$z = 10^\circ 10' 17'',206,$

Resultate, deren Zuverlässigkeit wegen der geringen Correction von z von selbst einleuchtend ist.

Die Verlagshandlung sieht sich im Besitze einer Anzahl von gewichtigen

B e u r t h e i l u n g e n

von

Professor Dr. Schrön's

siebenstelligen gemeinen Logarithmen,

von denen einstweilen folgende hier ihren
Platz finden mögen.

Eine Ausgabe der Logarithmen kann in unseren Tagen nicht wohl etwas sachlich Neues geben; ihr Verdienst kann nur in der Form und Anordnung des Stoffes, wie in der strengen Correctheit bestehen.

Was das Letztere betrifft, so kann natürlich nur ein längerer und häufiger Gebrauch entscheiden; indess können wir schon jetzt uns dahin aussprechen, dass die in der Einleitung ausführlicher angegebenen Mittel, eine solche Correctheit zu erzielen, vollen Beifall und Beistimmung jedes praktischen Rechners finden werden. So, und nur so muss man verfahren, wenn man Brauchbares und Tüchtiges in diesem Fache leisten will.

Vielleicht dürften Manchem die in der Einleitung gegebenen Beispiele zu gehäuft erscheinen; erwägt man jedoch, dass das Werk auch dem Selbststudium, sowie für Lehranstalten dienen soll, so wird man zugeben, dass der Verfasser nicht zu viel gegeben hat, und dass im Gegentheil dem kundigen Lehrer noch Manches hinzuzufügen übrig bleiben wird.

Die sinnreiche Art, durch einen einfachen Strich und ohne die geringste räumliche Erweiterung die Genauigkeit der logarithmischen Mantisse zu verdoppeln, wird man mit besonderem Danke anerkennen, und wir können den Wunsch nicht unterdrücken, dass namentlich bei Logarithmen von weniger Decimalstellen dies allgemeine Nachahmung finden möge. Man würde dann z. B. bei Anwendung fünfstelliger Logarithmen jeden durch seine Tangente bestimmten Winkel bis auf die Secunde verbürgen können.

Dem Werke ist als dritter Theil eine 75 Seiten starke Proportionaltafel hinzugefügt. Da die Theile auch einzeln verkäuflich sind, so steht es Jedem frei, diesen dritten Theil wegzulassen, und so ist gegen diese Hinzufügung äusserlich nichts einzuwenden. Sonst will es uns bedünken, dass bei einer nur mittelmässigen Gewandtheit im Rechnen diese Tafel entbehrlich sei und dass die Meisten es bequemer finden werden, die unbedeutende Operation, wo sie nicht, wie es meistens der Fall sein wird, einfach im Kopfe vollzogen werden kann, durch ein Paar Ziffern auf einem zur Seite liegenden Hilfsblatte zu vollziehen, als sie in der Tafel aufzuschlagen.

Vielleicht wäre Manchem statt dieser Tafel ein anderer Zusatz willkommener gewesen. Wir meinen die natürlichen trigonometrischen Linien, die gar nicht so selten gebraucht werden, etwa für jede Minute, nebst beigesetzten Proportionaltheilen. Sie würden den 474 Seiten der beiden ersten Theile nur 45 hinzugefügt haben.

Nicht minder willkommen wäre ein Zusatz gewesen, der nur eine einzige Seite beansprucht: eine Zusammenstellung der sehr häufig gebrauchten einzelnen Logarithmen, wie sie unter anderen sehr zweckmässig in Bremiker's sechsstelligen Logarithmen gegeben ist.

Dagegen glauben wir, dass der Verfasser ganz recht gethan hat, die Gauss'schen Logarithmen wegzulassen. Nicht dass wir den praktischen Vortheil, den diese sinnreiche Erfindung dem Berechner gewährt, im Geringsten zu unterschätzen geneigt wären, sondern weil sie in der Beschränkung, wie sie meistens da gefunden werden, wo sie eine blosser Zugabe bilden, nicht viel nützen können. Nur bei einer Ausführlichkeit wie in der Mathiesen'schen Ausgabe sind sie von Werth, ähnlich wie die hyperbolischen Logarithmen.

Die Ausstattung des Werkes verdient alles Lob. Wie wichtig gerade bei dieser Art von Schriften, mehr als bei jeder anderen, ein weisses, nicht zu dünnes Papier, klare, das Auge nicht verletzende Ziffern, bequeme Unterscheidbarkeit der Absätze und dergleichen für den Berechner sei, bedarf keines Beweises. Auch das Format ist das bequemste für siebenstelligen Logarithmen, und wir ziehen es unbedingt sowohl dem Quart als dem Kleinoctav vor.

Wir dürfen erwarten, dass der Verleger nicht häufig in den Fall kommen werde, die zugesagten 3 Thaler Honorar für jeden ihm angezeigten Fehler der Tafeln zu zahlen, und wünschen, dass das so fleissig und zweckmässig bearbeitete, so schön und angemessen ausgestattete, so billig dargebotene Werk die Verbreitung finden werde, die es in so vollem Maasse verdient.

Dorpat, im October 1860.

Mädler.

Logarithmentafeln waren bis vor kaum zehn Jahren ein halbes Sæculum hindurch die wahren Helfer in der Noth für diejenigen, die Autoren werden wollten, ohne eigene Gedanken aufzuwenden; mit sehr wenigen Ausnahmen wurden die Grundwerke von Vega, Callet, Lalande und Anderen copirt, einige unwesentliche, oft nichts weniger als wünschenswerthe Aenderungen angebracht, und so der Büchermarkt mit sehr überflüssigen, daher auch gewöhnlich kaum in Gebrauch gekommenen Producten überschwemmt. Endlich hat auch hier eine wirkliche Verbesserung sich Bahn gebrochen, dem Bedürfnisse des Rechners Abhülfe gebracht und lang gehegte, aber bis dahin immer wieder vereitelte Wünsche erfüllt. Bremiker trat zuerst mit seiner sechsstelligen, bald darauf mit einer siebenstelligen Tafel auf, von denen man sagen kann, dass sie eine neue Epoche in diesem Zweige der Literatur begründeten. Aus der Vorrede des hier zu besprechenden Werkes ersehen wir, dass nur äussere Zufälligkeiten Herrn Director Schrön, der schon seit 1838 durch seine drei- und fünfstelligen Logarithmen auf diesem Gebiete rühmlich bekannt ist, verhinderten, wenigstens gleichzeitig mit Bremiker den ersten Anstoss zur Einschlagung neuer Wege zu geben. Jedenfalls haben sich damit die Zeichen gemehrt, dass wir in Bezug auf solche Tafeln einer anderen Zeit entgegengehen, dass wir bald Bücher dieser Art eben nur nach Bremiker's oder Schrön's Musterarbeiten zu besitzen erwarten können, und der alte Ausspruch: „Was man in der Jugend entbehrt, hat man im Alter die Fülle“, sich auch hier wieder bewähren werde. Solche Fülle aber ist keineswegs unnütz; denn abgesehen von den eigentlichen, unänderlichen Principien ist es schwer, ganz allgemeine Regeln für die Form dieser Bücher zu geben: in Nebendingen darf der individuelle Geschmack sich geltend machen. In ersterer Beziehung kann es nicht überraschen, wenn die Einrichtungen der Schrön'schen Tafeln mit denen der Bremiker'schen in vielen Dingen zusammenfallen. Zunächst waren eben in beiden Fällen die zuerst von Babbage und J. J. Littrow hervorgehobenen, von uns an anderer Stelle (Oesterreichische Blätter für Literatur und Kunst vom 20. Februar 1854)

umständlich angegebenen Uebelstände und Unvollkommenheiten der älteren Tafeln zu entfernen. Hierher gehören: die Absonderung der Zahlenreihen durch horizontale und verticale weisse Zwischenräume in einzelne leicht zu übersehende Abtheilungen; Bezeichnung derjenigen Mantissen, welche in Bezug auf ihre ersten Stellen in unrechter Zeile stehen; Differenztafelchen für die trigonometrischen Functionen, und sowohl diese als die Proportionaltheile für die Logarithmen der Zahlen um eine Decimale weiter gehend, als die Tafeln selbst u. s. w. Stimmt das Schrön'sche Werk in diesen Punkten mit Bremiker's Tafeln überein, so weichen doch beide Bücher in anderen Rücksichten wesentlich von einander ab, und bekunden schon dadurch hinreichend ihre gegenseitige Unabhängigkeit. Das insbesondere nach der Breite grössere Format erlaubte vollständigere Mittheilung der Differenztafelchen und ganz gleich grossen Druck derselben mit den Ziffern des eigentlichen Textes. Ebenso gestattete die Wahl unter einander gleich hoher Ziffern eine Vergrösserung derselben, so dass ihre Ausnehmbarkeit auch weitsichtigen Augen völlig genügen dürfte. Der Wechsel der ersten Mantissen ist durch * kenntlich gemacht. Unter die letzte Mantisse ist ein Strich gesetzt, wenn dieselbe wegen der weggelassenen Stellen um $\frac{1}{4}$ zu vermindern ist; fehlt der Strich, so hat im Gegentheile eine Vermehrung um $\frac{1}{4}$ stattzufinden, wodurch die Grenze des unvermeidlichen Fehlers der Tafel auf die Hälfte herabgesetzt wird. Für die Zahlen 100000 bis 108000 sind aus naheliegenden Gründen die Logarithmen auf acht Stellen angegeben.

In der Tafel für die trigonometrischen Functionen ist der Unterschied mit den Bremiker'schen Werken am auffallendsten. Herr Professor Schrön hat es nämlich vorgezogen, die Tafel an sich durchaus mit demselben Intervalle von 10'' und möglichst vielen Differenztafelchen zu geben, hingegen dem Bedürfnisse nach umständlicheren Tafeln für die ersten und letzten Grade des Quadranten durch Zugaben bei der Tafel der Logarithmen (trigonometrische Hilfszahlen *S* und *T*) zu genügen. Für die äusserste Schärfe ist dadurch allerdings mancher Vortheil erreicht; in der bei weitem grössten Mehrzahl von Fällen aber, wo es auf diese äusserste Schärfe nicht ankommt, scheint uns das dafür gebrachte Opfer an Bequemlichkeit zu gross gegen die sonst übliche Einrichtung mit wechselnden Intervallen. Indessen gestehen wir gern, dass wir damit eben das oben erwähnte Gebiet individuellen Bedürfnisses und Geschmackes berühren, und der Charakter des Schrön'schen Werkes, die Genauigkeit so weit zu treiben, als es bei siebenstelligen Tafeln überhaupt möglich, solche Abweichung von der gewöhnlichen Anordnung rechtfertigt.

Sehr vielen Rechnern willkommene Beigaben sind: die Interpolationstafel in der letzten Abtheilung des Werkes, eine Tafel zur Berechnung der gemeinen und natürlichen Logarithmen auf sechszehn Stellen, ferner eine Tafel zur Verwandlung der gemeinen in natürliche Logarithmen und umgekehrt, endlich eine Tafel, welche die Länge der Kreisbogen für den Halbmesser 1 giebt. Umständliche Einleitungen lehren den Gebrauch der verschiedenen Tafeln.

Die tadelloso schöne Ausstattung des Buches und die offenbare Sorgfalt für die Correctheit desselben lassen den Preis (1 Thlr. 22 $\frac{1}{2}$ Sgr.) als ungemein billig erscheinen. In der Verkäuflichkeit jeder einzelnen der drei Abtheilungen (Tafel der Logarithmen, Tafel der trigonometrischen Functionen und Interpolationstafel) sehen wir einen früher bei ähnlicher Veranlassung von uns ausgesprochenen Wunsch erfüllt, und glauben damit die Nützlichkeit und Verbreitung des trefflichen Werkes wesentlich gefördert.

Wien.

K. v. Littrow.

Zu der Herausgabe der vorliegenden Tafeln bewogen — nach der Vorrede — verschiedene Rücksichten. Sie sollen nämlich:

1. die schriftlichen Hilfsrechnungen bei der Interpolation entbehrlich machen;
2. dabei eine grössere Genauigkeit gewähren, als andere Tafeln von ähnlichem Umfange;
3. zugleich einen verschiedenen Gebrauch nach Gewohnheit und Bedürfniss zulassen;

4. auch für Rechnungen mit sechsstelligen Logarithmen ein bequemerer und schärferes Hülfsmittel darbieten, als dies die gewöhnlichen sechsstelligen Logarithmen vermögen;

5. durch ihre Ausstattung dem Auge angenehm und wohlthuend sich erweisen und

6. durch die vier verschiedenen Ausgaben einfachere Zwecke mit geringem Aufwande befriedigen.

Der Kundige erkennt auf den ersten Blick, wie sehr durch die Erfüllung der vorhergehenden Bedingungen allen den Anforderungen genügt und entsprochen wird, welche man in jetziger Zeit an Logarithmentafeln zu stellen gewohnt ist. Welche Einrichtungen der einsichtsvolle Herr Herausgeber aber getroffen hat, um allen diesen Erfordernissen zu genügen, kann natürlich an diesem Orte nicht ausführlich dargethan, und muss in dem Werke selbst weiter nachgesehen werden. Fragt man uns aber nach unserem Urtheil, ob den in Rede stehenden Anforderungen in diesen Tafeln auch wirklich entsprochen worden sei, so beantworten wir diese Frage mit Ja! und fügen hinzu, dass diese Einrichtungen keineswegs in Weitläufigkeiten führen, sondern uns überall im Ganzen einfach und zweckmässig erschienen sind, wobei ausserdem noch hervorgehoben werden mag, dass die Interpolationstafel Nr. III. diesen Tafeln vorzugsweise eigenthümlich ist.

Was nun die äussere Ausstattung betrifft, so übertreffen nach unserer Meinung in Bezug auf Papier, Druck und Zweckmässigkeit des Formats diese Tafeln die meisten bisher in Deutschland erschienenen Tafeln, so verdienstlich auch viele derselben — namentlich die in allen Beziehungen trefflichen Arbeiten von Bremiker — sind, wie wir bei unseren früheren Anzeigen solcher Tafeln überall, wo es uns das Verdienst zu fordern schien, gebührend und mit wärmster Anerkennung hervorzuheben uns bemühet haben. Ganz besonders dem Auge wohlthuend erscheinen uns in diesen neuen Tafeln die äusserst schön und scharf geschnittenen Ziffern, welche sich in ihrer Form am meisten den Ziffern in den berühmten und höchst seltenen, eben deshalb viel gesuchten, auf ganz unverwüstlichem Papier gedruckten *Tables of Logarithms*. By William Gardiner. London. 1742. 4^o, die wir bei dieser Anzeige zur Vergleichung vor uns liegen haben, nähern dürften. Ueberhaupt können sich diese neuen Tafeln rücksichtlich ihrer äusseren Ausstattung den besten Productionen der englischen und französischen Presse dieser Art nicht bloss unbedingt an die Seite stellen, sondern übertreffen dieselben selbst noch in vielen Beziehungen, so dass die Officin der Herren Friedrich Vieweg und Sohn jedenfalls für dieses dem deutschen Vaterlande, dem Auslande gegenüber, so viel Ehre machende typographische Werk den wärmsten Dank jedes Vaterlandsfreundes verdient.

Der Preis von 1 Thlr. 22½ Sgr. für ein solches Werk ist so ausserordentlich niedrig gestellt, dass es uns in der That unbegreiflich ist, wie dafür die Herstellung möglich gewesen sein kann, namentlich gegenüber den hohen Preisen der englischen und französischen Tafeln von gleichem Umfange. Ausserdem kann auch Tafel I., Tafel I. und II., Tafel III. separat zu dem Preise von beziehungsweise 20 Sgr., 1 Thlr. 7½ Sgr., 15 Sgr. bezogen werden, was auch eine überaus zweckmässige, mit besonderem Danke aufzunehmende Einrichtung ist.

Endlich sind diese Tafeln auch auf meergrünem Papier gedruckt ganz zu den nämlichen Preisen zu erhalten. Da wir ein solches Exemplar nicht zu sehen Gelegenheit gehabt haben, so können wir ein Urtheil darüber nicht abgeben, zweifeln aber nicht an der Zweckmässigkeit eines solchen Papiers namentlich für schwache Augen. Sollte sich uns Gelegenheit darbieten, ein solches Exemplar zu Gesicht zu bekommen, so werden wir nicht unterlassen, darüber nachträglich zu berichten, da uns selbst viel daran liegt, diesen schönen Tafeln möglichst allgemeinen Eingang zu verschaffen. Die ziemlich theuren englischen Tafeln von Shortrede sind auch auf solches meergrüne Papier gedruckt, uns aber bis jetzt auch nicht aus eigener Ansicht genauer bekannt geworden.

Herausgeber und Verleger haben hier allen billigen Wünschen in ausgezeichneter Weise entsprochen, und ein Werk geliefert, welches der deutschen mathematischen Literatur wahrhaft Ehre macht; möge dasselbe daher die Anerkennung, welche es so sehr verdient, in vollstem Maasse finden, und sich recht bald namentlich auch den Weg in die Lehranstalten bahnen. Tragen

die vorstehenden Worte dazu Einiges bei, so haben sie ihren Zweck erfüllt. Wir haben freilich jetzt schon eine ziemlich grosse Anzahl sehr schöner Logarithmen-Tafeln; indess sind die eigenthümlichen Vorzüge der vorliegenden wohl geeignet, denselben eine glückliche Zukunft zu versprechen.

Greifswald.

Dr. Gruner,
Professor der Mathematik.

Mit Rücksicht auf unsere Anzeige der ausgezeichneten Schrön'schen Logarithmen-Tafeln im Literar. Bericht Nr. CXLI, S. 2 bemerken wir, dass uns jetzt durch besondere Güte auch die Ansicht eines auf meergrünes Papier gedruckten Exemplars dieser schönen Tafeln verstattet worden ist, und können es uns nicht versagen, nachträglich unsere Leser noch besonders auf diese Exemplare aufmerksam zu machen, da wir die Farbe des zu denselben verwandten Papiers den Augen überaus wohlthuend gefunden haben, und daher der thätigen Verlagshandlung von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig unsern besondern Dank sagen, dass sie die Erwerbung solcher Exemplare möglich gemacht hat, in gleicher Weise, wie dies in England bei einigen Logarithmen-Tafeln der Fall ist.

Greifswald.

Dr. Gruner,
Professor der Mathematik.

Neben Sorgfalt für die Genauigkeit hat der Verleger für die Ausstattung vortrefflich gesorgt. Die Ziffern sind von gleicher Höhe und durchaus gleich dick, während die einzelnen Zeilen sich gut von einander abheben. Bei dem sehr mässigen Preise des ganzen Werkes werden diese schönen und zweckmässigen Tafeln willkommen sein und auch neben den Vega'schen Verbreitung finden.]

Heidelberger Jahrbücher.

(Professor Dr. Dienger in Heidelberg.)

Die Herausgabe von siebenstelligen Logarithmen-Tafeln, kurze Zeit nach dem Erscheinen der so verbreiteten Bremiker'schen Logarithmen, kann etwas überraschen und der Verfasser, Herr Professor Schrön, hat sich daher veranlasst gesehen, über die Entstehung dieser Tafeln, die nach einem ähnlichen Plane, wie die Bremiker'schen entworfen sind, ausführlicher sich auszulassen. Bereits 1843 hat der Herr Verfasser die Absicht gehabt, diese Tafeln zum Druck zu befördern, aber erst 1846 hat die Verlagshandlung von Vieweg die Herausgabe übernommen, die in Folge der inzwischen eingetretenen politischen Ereignisse ins Stocken kam, so dass der Satz erst vor Kurzem beendet werden konnte, jedoch beim Erscheinen der Bremiker'schen Tafeln zum Theil vollendet war.

Allein, ganz abgesehen von diesen Angaben, die der Verfasser in der Vorrede mitgetheilt hat, erscheint die Herausgabe vorliegender Tafeln, neben den vorhandenen trefflichen Bremiker'schen, durchaus erwünscht, indem das vorliegende Handbuch sich auf das vortheilhafteste vor den meisten vorhandenen auszeichnet.

Der Verfasser hat drei verschiedene Tafeln zusammengefügt. Die erste der gemeinen Logarithmen ist den bekannten und geschätzten Tafeln von Babbage sehr ähnlich und ihre Einrichtung scheint vor den Bremiker'schen einige Vorzüge zu haben. Es sind neben den Zahlen die entsprechenden Minuten und Sekunden durchweg angegeben, ausserdem die Proportionaltheile, ähnlich wie bei Bremiker, aber mit grösserem Druck, indem das Format der Tafel grössere Ausdehnung gewährte.

Unterhalb der Tafeln dieser Logarithmen hat der Verfasser die Angaben für die bekannten Grössen S und T , sowie die Logarithmen für $\sin$ und $\tan$ von $10''$ zu $10''$, für die Bögen bis 30° eingefügt. Es scheint aber, als ob die Anfügung dieser Tafel nicht so zweckmässig ist, wenigstens für astronomische Rech-

nungen, als die Einrichtung der trigonometrischen Tafeln Bremiker's, die für die ersten 5⁰ die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von Secunde zu Secunde enthalten, was vielleicht hier, mit Beseitigung der erwähnten Tafel und anderweitiger Benutzung des so gewonnenen Raumes hätte möglich gemacht werden können.

Dagegen haben die trigonometrischen Tafeln wieder den Vorzug, dass die Proportionaltheile vollständiger und weiter gedruckt sind, als bei Bremiker, während im Uebrigen die Einrichtung der Tafeln beinahe identisch ist.

In beiden Tafeln ist die sehr zweckmässige Einrichtung getroffen, dass die letzte Mantisse unterhalb mit einem Strich versehen ist, sobald sie um $-\frac{1}{4}$ der letzten Stelle zu verbessern ist; fehlt der Strich, so ist $+\frac{1}{4}$ hinzuzufügen. Diese Einrichtung, die auch Babbage hat, erhöht die Schärfe in der Anwendung beträchtlich.

Die dritte, sehr nützliche Tafel, zur Erleichterung von Interpolationen, wird allen Rechnern erwünscht sein. Sie giebt für die ganzen Zahlen bis 409 die Producte derselben in die Decimalbrüche von 0,01, 0,02 . . . bis 0,99.

Druck und Ausstattung der Tafeln sind vorzüglich. Es sind nicht die ungleich hohen Zahlen der Bremiker'schen Tafeln gewählt und ebensowenig Zahlen, ähnlich denen in Zech's bekannten Tafeln, sondern solche, deren Züge, bei durchweg gleicher Höhe der Zahlen, überall gleich stark sind. Die Zahlen treten deutlich und scharf ins Auge. Die Verlagsbuchhandlung hat schliesslich noch die zu empfehlende Einrichtung getroffen, dass jede der drei Tafeln gesondert zu beziehen ist.

Altona.

Professor Dr. Peters,
Director der Sternwarte zu Altona.

Die mir übersandte Logarithmentafel von Schrön habe ich mit lebhaftem Interesse eingesehen, und finde sie nicht nur vortrefflich in der hier so wichtigen äusseren Erscheinung, sondern auch in der inneren Einrichtung. Durch die Unterscheidung der vermehrten und verminderten Mantissen durch Unterstreichung der ersteren, und durch andere Vervollkommnungen wird das Rechnen wesentlich erleichtert; ebenso macht die erhöhte Correctheit das Buch äusserst schätzbar, so dass seine allgemeinere Verbreitung sehr wünschenswerth erscheint.

Zürich, den 20. Februar 1860.

Professor F. Reuleaux.

Schrön's Logarithmentafeln sind das Vollendetste, was man in dieser Art sehen kann, ein typographisches Meisterstück. Die Grösse der Schriften, die Dicke der Striche, die Grösse der Zwischenräume, Alles ist mit einem so richtigen Tacte gewählt, dass man bei längerem Gebrauche der Tafel sich immer mehr darin befriedigt findet. Bei einem Zahlenwerke, wo sich die Richtigkeit von selbst verstehen soll, sind diese Nebendinge zu Hauptsachen geworden. Wer die Erfahrung gemacht hat, wie bei Theodoliten, bei Thermometer- und Barometerscalen ein falsches Verhältniss zwischen der Länge, Dicke und Entfernung der Theilstriche den Gebrauch eines Instrumentes, bei sonst richtiger Theilung, erschwert, ja geradezu unmöglich macht, der wird die Behauptung nicht missverstehen, dass bei einem Werke, dessen wesentlichster Zweck Erleichterung und Abkürzung von Rechnungen ist, im Aeusserlichen auch Alles auf diese Rücksicht hin geleistet sein muss.

Herr Roberts, aus der berühmten Firma »Sharp and Roberts« in Manchester, hatte im Setzen der Buchstaben bei den Aufschriften der Locomotiven einen so feinen Tact, dass ihm kein Arbeiter Genüge leisten konnte; aber eine von ihm gesetzte Aufschrift war auf 50 Schritte weiter deutlich zu lesen, als wenn die Buchstaben so ohne Ueberlegung aneinander gestellt waren.

Die Mitwirkung des Verfassers tritt bei einem solchen Werke bescheiden zurück. Wenn wir aber erfahren, dass in dem vortrefflichen Vega-Bremiker'schen Handbuche gleichen Inhaltes von 1856 noch sieben Fehler gefunden wurden, die hier ausgemerzt sind, so können wir uns dazu Glück wünschen. Jetzt würde

ein einziger Fehler zu einer neuen Auflage Veranlassung genug sein. Der Verfasser hat durch seine lichtvolle Einleitung und Gebrauchsanweisen den siebenstelligen Logarithmen beinahe die Schärfe der zehnstelligen verschafft und dadurch den grossen Thesaurus jedem zugänglich und auch entbehrlich gemacht. Bei dem kleinen Volum des vorliegenden Werkes hat man nicht in zwei Bänden nachzuschlagen, noch 10 Thlr. anzulegen.

Das vortreffliche weisse Papier der Wendhäuser Fabrik thut auch das Seine. Denn wer möchte sich beim Rechnen mit Logarithmen die Augen durch graues Papier verderben wollen?

Coblenz, Juni 1860.

Medicinalrath Dr. Mohr.

Die siebenstelligen Logarithmentafeln von Schrön zeichnen sich sowohl durch die Arbeit des Verfassers, als durch die Leistung des Verlegers vor allen ähnlichen in und ausserhalb Deutschland erschienenen Werken vortheilhaft aus.

Zunächst begründet der Umstand, dass bei der Aufstellung dieser Tafeln eine grosse Zahl von Fehlern anderer logarithmischen Werke entdeckt sind (cfr. die Vorrede zur ersten Auflage) und dass seit Jahresfrist in der ersten Auflage nur fünf, lediglich auf dem Correcturlesen, nicht auf der Rechnung beruhende, ausserdem meistens leicht zu entdeckende und in der zweiten Ausgabe verbesserte Fehler aufgefunden sind, für die Correctheit der Tafeln ein sehr günstiges Urtheil.

Was die Ausstattung betrifft, so ist dieselbe nicht bloss elegant, sondern, was wichtiger ist, durch die Anordnung, die Form der Ziffern, die Spatien, das Papier und die ganze typographische Ausführung wohlthuend für das Auge bei anhaltendem Gebrauche.

Ausserdem aber empfiehlt sich das vorliegende Werk vor vielen ähnlichen durch diejenigen Einrichtungen, welche eine grössere Genauigkeit der logarithmischen Rechnung bezwecken, also vornehmlich durch die Unterstreichung derjenigen letzten Mantissenstellen, welche bei der Aufnahme in die Tafel um eine Einheit erhöht sind, weil der abgeschnittene Rest mehr als eine halbe Einheit dieser Stelle betrug, ferner durch die Aufnahme der Logarithmen der trigonometrischen Functionen von 10 zu 10 Secunden, durch die Ausdehnung der Proportionaltheile hierfür und durch die Mittheilung von Hülftafeln zur scharfen Berechnung der kleinen Winkel von 0 bis 3 Grad und der grossen von 87 bis 90 Grad.

Für Jeden, welcher überhaupt siebenstellige Logarithmen gebraucht, werden diese Erweiterungen und Vervollkommnungen erwünscht und nützlich sein. Dieses Werk wird daher nicht bloss für Astronomen und Mathematiker, sondern auch für Techniker eine willkommene Erscheinung sein. Denn wenn auch für sehr viele Fälle der Ingenieurpraxis eine solche Genauigkeit nicht erforderlich ist, vielmehr fünfstellige Logarithmen dazu ausreichen, wenn also der Ingenieur zu seinen gewöhnlichen Rechnungen sich auch der wenig umfangreichen und demnach bequemer zu handhabenden und einen geringeren Zeitaufwand bedingenden fünfstelligen Logarithmen bedienen wird; so unterliegt es doch keiner Frage, dass derselbe auch unter Umständen Aufgaben zu behandeln hat, welche eine grössere Genauigkeit und insbesondere siebenstellige Logarithmen erfordern. In allen Fällen muss daher der Ingenieur, von welchem man heut zu Tage eine tüchtige mathematische Bildung verlangt, eine siebenstellige Logarithmentafel in seiner Bibliothek besitzen, und ihre Einrichtung und ihren Gebrauch kennen. Daraus folgt ferner, dass der Techniker schon als Schüler in den Gebrauch solcher Tafeln eingeweiht werden muss, dass also die siebenstellige Logarithmentafel auch nothwendig ein Schulbuch sein und bleiben muss.

Die Verwendung der Schrön'schen Tafeln zu dem praktischen Zwecke der Technik und dem allgemeinen Zwecke des Unterrichts wird aber wesentlich durch den sehr mässigen Preis des Werkes und durch die Verkäuflichkeit der einzelnen Abtheilungen derselben erleichtert.

Braunschweig, den 10. October 1861.

Dr. H. Scheffler,

Baurath und Mitglied der Herzogl. Eisenbahn-Direction.

Das Logarithmenwerk von Dr. Ludwig Schrön ist ohne Frage das beste bis jetzt erschienene dieser Art, und kann man dasselbe Lehrern wie Schülern zur Benutzung aufs Wärmste empfehlen. Was diese Tafeln vor allen ähnlichen ganz besonders auszeichnet, ist die Angabe der Sicherheit der letzten Decimale, in ähnlicher Weise, wie man es in den trefflichen Tafeln von Babbage findet, was bei längeren Rechnungen von grossem Nutzen ist. Es wäre recht wünschenswerth, wenn sowohl Verfasser wie Verleger bei einer neuen Auflage dieses herrlichen Werkes sich bereit fänden, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen der ersten und letzten 10 Grade von Secunde zu Secunde oder wenigstens von 5 zu 5 Secunden aufzunehmen, da in diesen Intervallen die Interpolationen doch immer noch beschwerlich sind.

Clausthal, April 1860.

C. Prediger,
Markscheider.

Der sehr bekannte und hochgeachtete mathematische Schriftsteller, General Morin in Paris, war ersucht worden, Jemand vorzuschlagen, der eine französische Ausgabe besorge; er fand dafür nicht sofort den rechten Mann; indem er dieses dem Verleger anzeigte, schrieb er dabei folgende (13. August 1861) Worte, die in dem Munde des berühmten Mannes ein hohes Lob sind:

„Ich bedauere dies um so mehr, als die Einrichtung der Tafeln sehr gut und der Druck vortrefflich ist. Ich ziehe sie für meinen Theil denen von Callet weit vor, deren man sich in Frankreich bedient.

Paris, den 13. August 1861.

Morin.“

Dieses treffliche Logarithmen-Werk ist bereits von verschiedenen anderen Seiten so günstig beurtheilt worden, dass es hier genügt, auf dasselbe aufmerksam zu machen. Dasselbe bietet gegen andere ähnliche Werke beim Gebrauche mehrere erhebliche Vortheile dar und zeichnet sich ebenso sehr durch seine zweckmässige und schöne typographische Einrichtung, wie durch seine grosse Correctheit, seine hübsche Ausstattung und seinen verhältnissmässig billigen Preis aus. Es zerfällt seinem Inhalt nach in drei besondere Tafeln, von denen die erste die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108,000, die andere die Logarithmen der trigonometrischen Functionen aller Winkel von 10 zu 10 Secunden, und die dritte eine Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionaltheile und anderer Hilfsrechnungen enthält. Und um Jedem die Anschaffung nach Bedürfniss möglich zu machen, sind vier verschiedene Ausgaben angeordnet worden, und zwar 1) die I. Tafel, mit den Logarithmen der Zahlen für Solche, welche die Tafeln für trigonometrische Rechnungen nicht nöthig haben, 2) die I. und II. Tafel, mit den Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen für Solche, welche auch für trigonometrische Rechnungen der Interpolationstafel nicht bedürfen, 3) die III. oder Interpolationstafel für Solche, welche diese Tafel für die erste Ausgabe oder für andere Tafeln anzuwenden wünschen, und 4) das Gesamtwerk, bestehend aus der I., II. und III. Tafel, für Solche, welche alle Tafeln vollständig besitzen wollen. Wir zweifeln daher nicht, dass dies Werk allenthalben sich einer guten Aufnahme zu erfreuen haben wird. Wir unserseits können es wenigstens nur bestens empfehlen.

Literar. Mittheilungen aus St. Gallen. 1861. Nr. 64.

Ich spreche es gern aus, dass in den Schrön'schen siebenstelligen Logarithmen für die Richtigstellung der Ziffern die grössten und ausreichenden Vorichtsmaassregeln getroffen sind; dass der Druck, was Deutlichkeit der Ziffern und Annehmlichkeit des Gebrauchs des Buches und Leichtigkeit des Lesens und Aufschlagens der Zahlen betrifft, unübertroffen ist, und dass endlich die durch siebenstelligen Logarithmen erreichbare Genauigkeit durch die Schrön'schen Tafeln bequemer, als durch andere, erreicht werden kann.

Giessen, den 8. August 1862.

Prof. Dr. H. Kopp.

Die Schrön'schen siebenstelligen Tafeln finde ich in jeder Beziehung praktisch und den verschiedenen Bedürfnissen der Rechner entsprechend; ganz besonders hat mich aber die Beifügung der Proportionaltheile und dann der Interpolationstafel befriedigt, und ich glaube, dass Jeder, der viel zu rechnen hat, die desfalls getroffenen Einrichtungen als bequem und zweckmässig anerkennen wird.

München, den 27. Juli 1862.

Prof. Dr. Lamont,

Director der Sternwarte zu Bogenhausen.

Die Ansicht, welche Herr Prof. Peters in Nr. 1257 des 53. Bandes seiner Astronomischen Nachrichten über die Schrön'schen siebenstelligen Logarithmen ausgesprochen hat, theile ich in allen wesentlichen Punkten. Es ist gewiss mit Dank anzuerkennen, wenn auch deutsche Verlags-Buchhandlungen für wohl ausgestattete Stereotyp-Ausgaben von Logarithmentafeln sorgen.

Sternwarte Bilk bei Düsseldorf, den 26. Juli 1862.

Dr. R. Luther.

Die Schrön'schen Logarithmentafeln zeichnen sich durch Reinheit des Druckes und eine eigenthümliche Klarheit und Deutlichkeit der Ziffern sehr vortheilhaft aus. Diese Schärfe und Deutlichkeit der Ziffern macht ein rasches und sicheres Ablesen möglich, während die Orientirung dadurch wesentlich gefördert wird, dass die Hauptabtheilungen durch grössere und fettere Schrift hervorgehoben sind und zwar in Tab. I. alle mit 0 endigenden *numeri*, in Tab. II. aber die Zahl der Minuten.

Ganz abgesehen von diesen Vorzügen des Druckes bieten aber die Schrön'schen Tafeln durch ihre Einrichtung noch wesentliche Vorthelle, von welchen hier nur die bedeutendsten kurz hervorgehoben werden sollen.

In Tab. I. findet man die ganze Seite durch eine horizontale Doppellinie in zwei ungleiche Theile getheilt, von welchen der untere (11 Zeilen auf Seite 2 bis 5, 9 Zeilen auf Seite 6 bis 185 und 8 Zeilen auf Seite 186 bis 201) als Fusstafel bezeichnete Theil nur eine Ergänzung der logarithmisch trigonometrischen Tafel II. ist. Auf diese Fusstafel werden wir deshalb erst später zurückkommen.

Mit Hülfe des oberen Theiles der Tafel I. in der Haupttafel kann man nun zu jeder gegebenen Zahl den Logarithmen und zu jedem Logarithmen die zugehörige Zahl ganz in derselben Weise aufsuchen oder durch Interpolation berechnen, wie mittelst aller übrigen Logarithmentafeln gleicher Ausdehnung. Eine grössere Genauigkeit der letzten Mantisse (der siebenten Decimalstelle des Logarithmen) ist aber bei den Schrön'schen Tafeln dadurch gesichert, dass die Proportionaltheile (auf der rechten Seite der Tafel) bis auf die achte Decimalstelle genau angegeben sind und dass bei den in der Tafel selbst enthaltenen Logarithmen durch Beisetzung oder Weglassung eines kleinen Horizontalstrichs unter der letzten Ziffer angedeutet ist, ob der mit dieser Ziffer schliessende Logarithme zu gross oder zu klein ist. Er ist zu klein, wenn der Strich fehlt, zu gross, wenn er vorhanden ist.

So finden wir z. B. auf Seite 33

$$\log. 23949 = 4,3792874.$$

Aus dem Horizontalstrich unter 4 ersehen wir nun, dass die letzte Decimalstelle dieses Logarithmen etwas zu gross ist, dass bei Berücksichtigung einer grösseren Anzahl von Decimalstellen auf die siebente die Ziffer 3 käme, auf die achte aber eine Zahl, welche grösser ist als 5. Wenn wir also in die Rechnung einführen

$$\log. 23949 = 4,3792873\,75,$$

so ist die Unrichtigkeit dieses Logarithmen höchstens 0,000000025, während bei gewöhnlichen siebenstelligen Logarithmen die Fehlergränze bis auf das Doppelte, nämlich bis auf 0,00000005 steigen kann.

Für $\log. 23567$ finden wir in den Schrön'schen Tafeln den Werth 4,3723043. — Aus dem Fehlen des Horizontalstriches unter der letzten Ziffer 3 ersieht man, dass bei Berücksichtigung von mehr als 7 Decimalstellen auf die

achte eine Zahl kommen würde, welche kleiner ist als 5, dass also die Fehlergränze höchstens 0,000000025 beträgt, wenn man für $\log. 23567$ den Werth 4,3723043 25 in Rechnung bringt.

Näheres über die Verwerthung dieses Horizontalstrichs zur Erlangung grösserer Genauigkeit findet man in der den Schrön'schen Tafeln vorausgeschickten Einleitung.

Ebenso ist einleuchtend, dass die Hinzufügung der achten Decimalstelle zu den Proportionaltheilen auf der rechten Seite der Haupttafel gleichfalls die Erreichung einer grösseren Genauigkeit ermöglicht.

Auf der oberen Abtheilung der Tabelle I. des Schrön'schen Werkes finden wir aber noch Columnen, welche bei den gewöhnlichen Logarithmentafeln fehlen. Auf Seite 1 bis 5 nämlich finden wir links von jeder mit *Num.* überschriebenen Verticalreihe eine Verticalcolumnne, welche entweder mit " oder mit ' überschrieben ist und welche die von Secunde zu Secunde fortschreitenden Winkel von 1" bis 1' 40" enthält; für diese Winkel liest man die entsprechende Secundenzahl in der zugehörigen mit *Num.* überschriebenen Columnne ab, indem man von der nebenstehenden Zahl die letzte Null fortlässt. So sehen wir z. B. auf Seite 4, dass 1' 9" gleich 69 Secunden, und auf Seite 5, dass 1' 34" gleich 94" ist.

Auf Seite 6 bis 185 findet man in gleicher Weise die Secundenzahl zu den in der ersten Verticalreihe links enthaltenen, von Secunde zu Secunde fortgezählten Winkeln von 1' 40" bis 16' 40" in der mit *Num.* überschriebenen Verticalreihe, wenn man die letzte Null dieser Zahl weglässt. So sieht man z. B.:

auf Seite 19, dass $2' 48'' = 168''$

und auf Seite 159, dass $14' 26'' = 866''$.

Ferner giebt die volle Zahl der mit *Num.* überschriebenen Columnne von Seite 6 bis 201 die in Secunden verwandelten Winkel, welche in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückt in der unmittelbar links daneben stehenden Verticalreihe aufgeführt sind, und zwar von 16' 40" auf Seite 6 bis 2° 59' 59" auf Seite 201. So finden wir z. B.

auf Seite 40, dass $0^0 45' 18''$ gleich ist 2718"

auf Seite 105, „ $1^0 39' 43''$ „ „ 5983"

und auf Seite 189, „ $2^0 49' 17''$ „ „ 10157"

Welche Anwendung von diesen Zahlen zu machen ist, wird alsbald erläutert werden.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Tafel II. Seite 204 bis 474 über, welche die Logarithmen der Sinus und Tangenten, der Cosinus und Cotangenten aller Winkel bis 90° von 10 zu 10 Secunden nebst den Differenzen und Proportionaltheilen von 3° bis 87° enthält.

Es ist wohl ohne weitere Auseinandersetzung einleuchtend, dass ein grosser Vorzug dieser Tafeln darin besteht, dass sie die Logarithmen der trigonometrischen Functionen für den ganzen ersten Quadranten von 10 zu 10 Secunden enthalten, während die gewöhnlichen Tafeln sie nur von Minute zu Minute fortschreitend geben. Es ist dadurch die Interpolation nicht allein wesentlich erleichtert, sondern auch eine grössere Genauigkeit erreichbar.

Für die Sinus und Tangenten bis zu 3° (also auch für Cosinus und Cotangente von 87° bis 90°) sind aber die Differenzen der Logarithmen der von 10 zu 10 Secunden und bis zu 1' selbst der von Secunde zu Secunde fortschreitenden Winkel so gross, dass dadurch die Interpolation nach dem gewöhnlichen Verfahren sehr umständlich wird und eine ziemlich grosse Rechnung erfordert. Diese wird nun durch die Anwendung der Fusstafel von Tab. I. und die damit in Verbindung stehenden Verticalreihen auf der linken Seite der Haupttafel auf eine eben so sinnreiche als zweckmässige Weise vermieden.

Bezeichnet nämlich α'' den in Secunden ausgedrückten Werth des Winkels α , so sind

$$S = \log. \frac{\sin. \alpha}{\alpha''} \text{ und } T = \log. \frac{\tan. \alpha}{\alpha''}$$

Grössen, welche zwischen 0 und 3° sich so wenig ändern, dass wenn man die Werthe von S sowohl, wie die von T für die von 10 zu 10 Secunden fortschreitenden Winkel in eine Tabelle zusammenstellt, die Differenzen zwischen je zwei auf einander folgenden Werthen von S sowohl, als auch zwischen zwei auf

einander folgenden Werthen von T so klein sind, dass man sie entweder ganz unberücksichtigt lassen oder sie ohne grosse Mühe in die Rechnung einführen kann.

Diese Werthe von S und T sind nun in der Fusstafel zu Tab. I. enthalten.

Für wachsende Winkel nehmen die Werthe von S ab, die von T nehmen zu, aber so langsam, dass S von $0''$ bis $30''$, T aber von $0''$ bis $45''$ auf 8 Decimalstellen ungeändert bleibt.

Sämmtliche in Tab. I. enthaltenen Werthe von S und T haben die Kennziffer und die drei ersten Mantissen gleich, sie fangen sämmtlich mit 4,685 an, weshalb denn auch neben den entsprechenden Winkelwerthen nur die fünf letzten Mantissen von S und T aufgeführt sind. So steht z. B. auf Seite 2 neben $35''$ unter S die Zahl 5748 6, es ist also für $35''$ $S = 4,6855748\ 6$. Eben so ersehen wir aus der Fusstafel auf Seite 110, dass T für $1^\circ 43' 30''$ gleich 4,6857061 1 ist.

Da nun

$$S = \log. \frac{\sin. \alpha}{\alpha''} = \log. \sin. \alpha - \log. \alpha'',$$

so ist auch

$$\log. \sin. \alpha = S + \log. \alpha''.$$

Es ist also der Werth von $\log. \sin. \alpha$ in zwei Theile getheilt, von welchen sich der eine S aus der Fusstafel ohne mühsame Interpolation ergiebt, während der zugehörige Werth von $\log. \alpha''$ mit Hülfe der Verticalcolumnen auf der linken Seite der Haupttafel sich unmittelbar aus derselben entnehmen lässt.

Es soll z. B. bestimmt werden $\log. \sin. 3' 27,85''$, so sehen wir zunächst auf Seite 26, dass die Differenzen hier klein genug sind, um ohne merklichen Fehler den Werth von S für $3' 30''$ statt des für $3' 27,85''$ zu setzen; wir haben also

$$\begin{array}{r} S = 4,6855747\ 9 \\ + \log. 207,85 = 2,3177500\ 2 \end{array}$$

$$\log. \sin. 3' 27,85'' = 7,0033248\ 1$$

denn $3' 27,85''$ ist gleich 207,85 Secunden.

In gleicher Weise ist

$$T = \log. \frac{\tan. \alpha}{\alpha''} = \log. \tan. \alpha - \log. \alpha''$$

$$\log. \tan. \alpha = T + \log. \alpha''$$

und nach dieser Formel kann man die Werthe für $\log. \tan. \alpha$ in gleicher Weise berechnen, wie es eben für $\log. \sin. \alpha$ erläutert wurde.

Soll z. B. $\log. \tan. 1^\circ 25' 34,6''$ berechnet werden, so finden wir auf Seite 88

$$\begin{array}{r} T \text{ für } 1^\circ 25' 30'' = 4,6856644\ 3 \\ + \text{diff. für } 4,6'' \cdot \cdot = \quad \quad \quad 1\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad 4,6856645\ 9 \\ + \log. 5134,6 \cdot \cdot \cdot = 3,7105066\ 2 \end{array}$$

$$\log. \tan. 1^\circ 25' 34,6'' = 8,3961712\ 1$$

denn da der Werth von T , wie wir aus der Tafel ersehen, nur um 35 (wo 5 auf die achte Decimalstelle gehört) wächst, wenn der Winkel von $1^\circ 25' 30''$ um $10''$ zunimmt, so ist die Differenz von T für $4,6''$ gleich 16 (wo die Ziffer 6 gleichfalls auf die achte Decimalstelle zu setzen ist), und ferner ist $1^\circ 25' 34,6'' = 5134,6''$.

Diese Beispiele mögen genügen, die grossen Vortheile anzudeuten, welche die Schrön'schen Tafeln bieten, und welche noch mehr hervortreten, wenn man im Gebrauch derselben einige Uebung erlangt hat.

Dr. Joh. Müller,

Hofrath, Professor der Physik an der Universität Freiburg i. B.

einander folgendes Werthe von T so klein sind, dass man sie entweder ganz unberücksichtigt lassen oder eine grosse Mühe in die Rechnung einbringen kann.

Diese Werthe von z und T sind nun in der Tabelle zu Tab. I enthalten. Für verschiedene Winkel nehmen die Werthe von z ab, die von T nehmen zu, aber so langsam, dass z von $0''$ bis $30''$, T aber von $0''$ bis $81''$ auf $81''$ ansteigen ungeschädlich bleibt.

Entsprechend in Tab. I enthaltenen Werthe von z und T haben die Kenntniss und die drei ersten Mannschaften gleich, sie können sämtlich mit 4.687 an Werthe dann auch neben den entsprechenden Winkelwerthen zur Hand setzen. Man muss von T und T aufwärts sind. So steht z. B. auf Seite 2 neben $30''$ unter z die Zahl 67.45 , es ist also für $30''$ $z = 4.68745$. Eben so stehen wir aus der Tabelle auf Seite 119, dass T für $10' 30''$ gleich 4.687451 ist. Da nun

$$z = \log \frac{\sin a}{a} = \log \sin a - \log a,$$

so ist also der Werth von $\log \sin a$ in zwei Theile getheilt, von welchen einer eine z aus der Tabelle ohne mühsame Interpolation ergibt, während der zugehörige Werth von $\log a$ mit Hilfe der Verzeichnisse und der linken Seite der Haupttafel sich unmittelbar aus derselben entnehmen lässt.

Es soll z. B. bestimmt werden $\log \sin 8' 27.85''$, so sehen wir zunächst auf Seite 20, dass die Differenzen hier klein genug sind, um ohne merklichen Fehler den Werth von z für $8' 28''$ statt des für $8' 27.85''$ zu setzen; wir haben also

$$\begin{aligned} z &= 4.687479 \\ + \log 207.82 &= 2.3177502 \\ \hline \log \sin 8' 27.85'' &= 7.00522481 \end{aligned}$$

denn $8' 27.85''$ ist gleich 207.82 Sekunden. In gleicher Weise ist

$$T = \log \frac{\cos a}{a} = \log \cos a - \log a$$

und nach dieser Formel kann man die Werthe für $\log \cos a$ in gleicher Weise berechnen, wie es oben für $\log \sin a$ erläutert wurde.

$$\begin{aligned} T \text{ für } 10' 30'' &= 4.687443 \\ + \text{diff. für } 4.6'' &= 1.0 \\ \hline T &= 4.688503 \\ + \log 614.6 &= 2.7902662 \\ \hline \log \cos 10' 34.6'' &= 6.9012121 \end{aligned}$$

denn da der Werth von T wie wir aus der Tafel sehen, nur um 33 (wo z auf die achte Decimale Stelle wächst, wenn der Winkel von $10' 30''$ um $10''$ zunimmt, so ist die Differenz von T für $4.6''$ gleich 1.0 (wo die Differenz gleichfalls auf die achte Decimale Stelle zu setzen ist), und ferner ist $10' 34.6''$ gleich 614.6 Sekunden, so dass die Differenzen, die grössere Theile annehmen, welche die dritte und vierte Tafel bilden, und welche noch mehr hervorgehen, wenn man im Gebrauch derselben einige Übung erlangt hat.

Dr. Joh. Müller.

Hofrath, Professor der Physik an der Universität Freiburg i. B.

Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.

Compendium der höheren Analysis

von

Dr. Oscar Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik an der Königl. polytechnischen Schule zu Dresden und Mitglied der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig etc.

In zwei Bänden.

Mit in den Text eingedruckten Holzstichen.

Zweite völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage.

gr. 8. Fein Velinpap. geh.

Erschienen ist: Erster Band (vollständig in drei Lieferungen).

Preis 2 Thlr. 15 Sgr.

Versuch einer Kritik

der

P r i n c i p i e n .

der

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bearbeitet

von

Jacob Friedrich Fries,

Doctor der Medicin und Philosophie, Grossherzogl. S. Weim. Geh. Hofrath, ordentlichem Professor der Physik zu Jena und correspondirendem Mitglied der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin und München, auswärtigem Mitglied der Gesellschaft für Wissenschaft und Kunst in Utrecht.

gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 1 Thlr. 10 Sgr.

Abbildung krummer Oberflächen

auf einander

und

Anwendung derselben auf höhere Geodäsie.

Von

Dr. J. Dienger,

Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Mit in den Text eingedruckten Holzstichen.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 20 Sgr.

Ausgleichung der Beobachtungsfehler

nach der Methode der kleinsten Quadratsummen.

Mit zahlreichen Anwendungen, namentlich auf geodätische Messungen.

Von

Dr. J. Dienger,

Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Mit in den Text eingedruckten Holzstichen.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 1 Thlr. 5 Sgr.

Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.

Siebenstellige gemeine Logarithmen

der Zahlen von 1 bis 108000
und der
Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten
aller Winkel des Quadranten von 10 zu 10 Secunden
nebst einer

Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionaltheile.

Von

Dr. Ludwig Schrön,

Director der Sternwarte und Professor zu Jena, Mitgliede der Kaiserlich Leopold. Carolin. deutschen Academie
der Naturforscher und der gelehrten Gesellschaften zu Breslau, Frankfurt a. M., Halle und Jena.

Dritte revidirte Stereotyp-Ausgabe. Gesammt-Ausgabe in drei Tafeln.

Imperial-Octav. geh. Preis 1 Thlr. 22½ Sgr.

Um auch einfachere Zwecke mit geringerem Kostenaufwande zu befriedigen, sind aus folgenden Theilen des Werkes für sich verkäufliche Ausgaben gebildet:

die Tafel I mit den Logarithmen der Zahlen, für Solche, welche Tafeln für trigonometrische Rechnungen nicht nöthig haben (Preis 20 Sgr.),

die Tafeln I und II mit den Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen, für Solche, welche auch für trigonometrische Rechnungen der Interpolationstafel nicht bedürfen (Preis 1 Thlr. 7½ Sgr.),

die Interpolationstafel, Tafel III, für Solche, welche diese Tafel für die erste Ausgabe oder für andere Tafeln anzuwenden wünschen (Preis 15 Sgr.), und

das Gesammtwerk, bestehend aus Tafel I, II und III, für Solche, welche alle Tafeln vollständig besitzen wollen (Preis 1 Thlr. 22½ Sgr.).

Jedem, welcher mit siebenstelligen Logarithmen zu rechnen veranlasst ist, dürften diese Tafeln willkommen sein, da sie in mehrfacher Hinsicht wesentliche Fortschritte enthalten. Während nämlich alle Werke über Logarithmen, welche auf bequemere Weise zugleich schärfere Resultate liefern, einen grösseren Umfang zu haben pflegen, gewähren diese Tafeln, verglichen mit anderen für dieselben Zwecke bestimmten, bei geringerem Umfange eine grössere Genauigkeit und eine bequemere Interpolation, besonders in dem schwierigsten Theile derselben, bei den kleinen trigonometrischen Functionen, wo die schriftlichen Hilfsrechnungen ganz vermieden werden.

Durch die unter der letzten Décimalstelle der Logarithmen angebrachten Striche ist die Grenze des Fehlers, welchen das Abschneiden aller folgenden Stellen mit sich bringt, auf die Hälfte vermindert. In Folge dieser Einrichtung gestatten auch die in der Einleitung nachgewiesenen drei Methoden für die Vereinigung der Proportionaltheile mit den Logarithmen einen verschiedenen Gebrauch der Tafeln I und II, je nach Gewohnheit und Bedürfniss, welcher Vortheil durch die Interpolationstafel (Tafel III) noch weiter unterstützt wird.

Ferner gewähren diese Tafeln eine bequemere und schärfere Rechnung mit sechsstelligen Logarithmen als die sechsstelligen Tafeln anderer Logarithmenwerke.

Ausserdem zeichnen sich diese Tafeln vor vielen anderen durch Correctheit aus, und wird in dieser Hinsicht bemerkt, dass ihre Aufstellung zur Entdeckung und Vermeidung von 555 (fünfhundert fünf und fünfzig) Fehlern anderer Tafeln (einschliesslich der 31 Fehler in den Zahlen S und T der Callet'schen Tafeln) Veranlassung gegeben hat.

Endlich ist auf die Ausstattung die grösste Sorgfalt verwendet; insbesondere wird sich der Satz durch Ziffern von eigenthümlicher Klarheit und Schärfe, welche bei den lichten Zwischenräumen der Ziffern und Spalten dem Auge vollkommene Ruhe gewähren, sowie der sorgsame Druck auf sehr schönem und starkem Velin-Schreibpapier in bequemer Formate der Zustimmung des Publicums zu erfreuen haben. Kein Logarithmen-Werk irgend einer Nation, der Deutschen, Engländer oder Franzosen etc., dürfte hinsichtlich der Ausstattung und des billigen Preises die Vergleichung mit diesen Tafeln bestehen.

Um die in den Tafeln möglicherweise noch verbliebenen Fehler zu entfernen, sind Preise auf deren Entdeckung ausgesetzt worden.

Das Nähere ist aus der Vorrede und den Einleitungen zu entnehmen, welche der besonderen Beachtung der Leser empfohlen werden.

Für Diejenigen, welche viel mit Logarithmen arbeiten, aber an schwachen Augen leiden, sind eine Anzahl Exemplare auf meergrünem Velinpapier gedruckt, welche Färbung die Augen ausserordentlich schont. Diese Exemplare können für den gleichen Preis wie die auf weissem Papier bezogen werden.

Da wo Mehrere zum Ankaufe einer Anzahl von Exemplaren zusammentreten, für Lehranstalten etc. ist jede Buchhandlung in den Stand gesetzt auf 6 auf einmal bezogene Exemplare ein Freiexemplar zu gewähren.

Freeden, Wilhelm <<von>>,

Die Praxis der Methode der Kleinsten Quadrate für die Bedürfnisse der Anfänger bearbeitet

Bd.: 1

Braunschweig 1863

Math.p. 153 w-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081806-6